

Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten

Vorlesungsnotizen

Stilianos Louca

Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Elemente der klassischen Differentialgeometrie	5
1.1	Gekrümmte Kurven	5
1.1.1	Definition: Krümmung einer Kurve	5
1.1.2	Definition: Krümmungsradius einer Kurve	5
1.1.3	Definition: Begleitendes Dreibein einer Kurve im \mathbb{R}^3	5
1.2	Gekrümmte Flächen im Raum	6
1.2.1	Krümmung von Normalschnitten	6
1.2.2	Definition: Hauptkrümmungen, Mittelkrümmung und Gauß-Krümmung	7
1.2.3	Berechnung der Hauptkrümmungen	7
1.2.4	Satz: Berechnung von Normalkrümmungen (Satz von Euler)	8
2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	9
2.1	Karten & Atlanten	9
2.1.1	Definition: Karte	9
2.1.2	Definition: Atlas	9
2.1.3	Definition: Maximaler Atlas	9
2.2	Topologische Räume	9
2.2.1	Definition: Topologischer Raum	9
2.2.2	Definition: Hausdorff	9
2.2.3	Definition: Konvergenz von Folgen	10
2.2.4	Definition: Stetigkeit	10
2.2.5	Definition: Abzählbare Basis	10
2.2.6	Definition: C^∞ -Mannigfaltigkeit	10
3	Tangentenvektoren	11
3.1	Der Tangentialraum	11
3.1.1	Definition: Tangentenvektor	11
3.1.2	Satz	11
3.1.3	Satz	11
3.1.4	Satz	11
3.2	Erzeugen von Tangentenvektoren	11
3.2.1	Definition: Kurve	11
3.2.2	Definition: ∂_i	12
3.3	Die Tangentenvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ als Basis	12
3.3.1	Satz	12
3.3.2	Hilfssatz	12
3.3.3	Theorem über die Koordinatenvektoren ∂_i	12
3.4	Vektorfelder	12
3.4.1	Definition: Vektorfeld	12
3.5	Lie-Klammern	13
3.5.1	Satz	13
3.5.2	Definition: Lie-Klammer	13

3.5.3	Satz	13
3.5.4	Eigenschaften der Lie-Klammer	13
3.5.5	Satz	14
3.5.6	Satz: Die Jakobi Identität	14
4	Tensoren	15
4.1	Summenkonvention	15
4.2	Multilinearformen	15
4.2.1	Definition: Tensor	15
4.2.2	Satz	15
4.2.3	Definition: Duale Basis	15
4.2.4	Satz	15
4.2.5	Definition: Tensor-Koeffizienten	16
4.2.6	Satz	16
4.2.7	Satz	16
4.3	Operationen	17
4.3.1	Definition: Tensor Multiplikation	17
4.3.2	Definition: Kontraktion	17
4.3.3	Definition: Überschiebung	17
4.4	Bilinearformen	18
4.4.1	Theorem: (Sylvester)	18
4.4.2	Definition: Definitionen zu Bilinearformen	18
4.4.3	Satz	19
4.4.4	Satz	19
4.5	Indexziehen	19
4.5.1	Indexziehen von oben nach unten	19
4.5.2	Indexziehen von unten nach oben	19
4.5.3	Satz	19
5	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten	20
5.1	Tensorfelder	20
5.1.1	Definition: Kovektorfeld (Form, 1-Form)	20
5.1.2	Definition: Tensorfeld	20
5.1.3	Definition: \mathcal{F} -homogene Abbildungen	20
5.1.4	Satz über \mathcal{F} -homogene Abbildungen	20
5.1.5	Definition: (Semi)-Riemannsche Mannigfaltigkeit	21
5.1.6	Definition: Bogenlänge	21
5.1.7	Definition: Riemannsche Mannigfaltigkeit	22
5.1.8	Definition: Lorenz-Mannigfaltigkeit	22
5.1.9	Definition: Orientierte Mannigfaltigkeit	22
5.1.10	Definition: Zeitorientierte Lorenz Mannigfaltigkeit	22
5.2	Raumzeit	22
5.2.1	Definition: Raumzeit	22
5.2.2	Definition: Arten von Vektoren	22
5.2.3	Definition: Lorenz-Basis	23
5.2.4	Satz über euklidische Unterräume	24
5.2.5	Satz	24
6	Spezielle Relativitätstheorie	25
6.0.6	Einführung: Newton	25
6.0.7	Definition: Beobachter & Teilchen	25
6.0.8	Definition: Momentanes Teilchen und Beobachter	25
6.0.9	Definition: Relativgeschwindigkeit	25
6.0.10	Satz über die Relativgeschwindigkeit	25
6.0.11	Satz über den Betrag der Relativgeschwindigkeit	26
6.0.12	Satz	26
6.0.13	Lorenz-Transformation	26
6.0.14	Definition: Energie-Impuls Form	27

6.0.15	Definition: Impuls & relative Masse	27
6.0.16	Satz über die Impulskomponenten	28
6.0.17	Umrechnung von Masse und Impuls zwischen Beobachtern	28
6.0.18	Definition: Feldstärkentensor	28
6.0.19	Definition: Magnetische & Elektrische Feldstärke	28
7	Differentialformen	29
7.0.20	Definition: p-Form	29
7.0.21	Der Raum aller p-Formen	30
7.0.22	Satz	30
7.0.23	Definition: Alternierung	31
7.0.24	Definition: Keilprodukt	32
7.0.25	Satz über das Keilprodukt	32
7.0.26	Definition: Volumenform	32
7.0.27	Satz über die Volumenform	33
7.0.28	Satz über n-Formen	34
7.0.29	Die Volumenform als Maß für Volumen	34
7.0.30	Definition: Hodge-Operator	34
7.0.31	Satz über den Hodge-Stern Operator	35
7.0.32	Der * Operator als Verallgemeinerung des Kreuzproduktes	36
8	Äußere Differentiation	37
8.0.33	Definition: Äußere Differentiation	37
8.0.34	Satz über die äußere Ableitung	39
8.0.35	Beispiel: Der Feldstärkentensor	39
9	Kovariante & Lie Ableitungen von Feldern	41
9.1	Kovariante Ableitung	41
9.1.1	Einführung	41
9.1.2	Definition: Zusammenhang	41
9.1.3	Fundamentalsatz der Riemanschen Geometrie	42
9.1.4	Definition: Christophelsymbole	43
9.1.5	Berechnung der Γ_{ik}^j	43
9.1.6	Geometrische Interpretation	44
9.2	Parallelverschiebung von Feldern	44
9.2.1	Definition: Parallelität von Vektoren längst Kurve	44
9.2.2	Folgerung für parallele Vektoren	45
9.2.3	Definition: Paralleltransport	45
9.2.4	Eigenschaften des Paralleltransports	46
9.2.5	Satz über kovariante Ableitung von Vektorfeldern	46
9.3	Lie-Ableitung	47
9.3.1	Definition: Lie Ableitung für skalare Felder	47
9.3.2	Definition: Lie Ableitung für Vektorfelder	47
9.3.3	Definition: Lie-Ableitung für Kovektorfelder	47
9.3.4	Definition: Lie Ableitung für allgemeines Tensorfeld	48
9.3.5	Definition: Fluss	48
9.3.6	Interpretation der Lie-Ableitung	48
9.3.7	Definition: Killing Vektor	48
9.3.8	Lemma: Charakterisierung von Killing-Vektoren	48
9.3.9	Lemma: Weitere Charakterisierung von Killing-Vektoren	49
9.3.10	Lemma über Killing-Vektoren und Geodäten	49
10	Krümmung	50
10.0.11	Definition: Krümmungsoperator	50
10.0.12	Definition: Riemansche Krümmungstensor	50
10.0.13	Satz über die Komponenten des Riemanschen Krümmungstensors:	50
10.0.14	Satz über den Riemanschen Krümmungstensor	50
10.0.15	Definition: Kovarianter Krümmungsoperator	51

10.0.16 Satz über den kovarianten Krümmungsoperator	51
10.0.17 Eigenschaften des kovarianten Krümmungsoperators	51
10.0.18 Definition: Ricci-Tensor	52
10.0.19 Definition: Gemischter Ricci-Tensor	52
10.0.20 Definition: Krümmungsskalar	52
10.0.21 Definition: Einstein Tensor	52
11 Einsteinsche Feldgleichung	53
11.0.22 Satz über die Feldgleichung	53
11.0.23 Begründung der Schwarzschild-Metrik	53
12 Zeit-Geodäten	56
12.0.24 Definition: Weltlinie	56
12.0.25 Definition: Uparametrisierter Beobachter	56
12.0.26 Satz über umparametrisierte Beobachter	56
12.0.27 Definition: Geodäte	57
12.0.28 Euler-Lagrange Gleichung	57
12.0.29 Satz über extremale Kurven	58
12.0.30 Berechnung von Geodäten	58
12.0.31 Satz über die Geodätengleichung	59
12.0.32 Bemerkungen zu Geodäten	59
12.0.33 Satz über die Kraftfreie Bewegung in der Schwarzschild Metrik	60
13 Integration	62
13.1 Einführung	62
13.1.1 Kurvenintegral 2. Art	62
13.1.2 Oberflächenintegral 2. Art	62
13.1.3 Kurvenintegrale 1. Art	62
13.1.4 Oberflächenintegral 1. Art	62
13.2 Allgemeiner Integralbegriff	63
13.2.1 Integrale 1. Art	63
13.2.2 Integral 2. Art	63
13.2.3 Satz über die Integration einer p-Form:	63
13.2.4 Elegantere Formulierung der Integration 1. Art	63

1 Elemente der klassischen Differentialgeometrie

1.1 Gekrümmte Kurven

1.1.1 Definition: Krümmung einer Kurve

Es sei $(x^1, x^2) : s \mapsto (x^1(s), \dots, x^n(s)) \in \mathbb{R}^n$ eine 2-mal differenzierbare Kurve, parametrisiert durch ihre Bogenlänge s . Dabei sei

$$x'(s) = \frac{dx}{ds}(s) =: \dot{x}(s)$$

der Tangentenvektor an der Stelle s . Dabei gilt per Konstruktion

$$\|\dot{x}(s)\| = 1$$

Dann definiert man die *Krümmung* $k_x(s)$ von x an der Stelle s als die Länge des Vektors $\ddot{x}(s)$.

Bemerke:

- Der Vektor $\ddot{x}(s)$ steht senkrecht auf \dot{x} , denn aus

$$1 = \|\dot{x}(s)\|^2$$

folgt durch Differenzieren

$$0 = \frac{d}{ds} \|\dot{x}(s)\|^2 = 2 \sum_i \dot{x}^i(s) \ddot{x}^i(s) = 2\dot{x}(s) \cdot \ddot{x}(s)$$

- Die Forderung dass x über ihre Bogenlänge parametrisiert ist, stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da Aufgrund der Monotonie von s bzgl. einer gegebenenfalls anderen Parameter, stets nach s umparametrisiert werden kann.

Beispiel: Der Kreisumfang, parametrisiert durch

$$x(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$$

besitzt die Krümmung $\frac{1}{R}$.

1.1.2 Definition: Krümmungsradius einer Kurve

Der *Krümmungsradius* $R_x(s)$ der Kurve x an der Stelle s ist der Radius des Kreises, der die gleiche Krümmung wie die Kurve im Punkt $x(s)$ hat, das heißt

$$R_x(s) = \frac{1}{k_x(s)}$$

1.1.3 Definition: Begleitendes Dreiein einer Kurve im \mathbb{R}^3

Es sei $x : s \mapsto x(s)$ eine 2-mal differenzierbare Kurve in \mathbb{R}^3 . Dann besteht das *begleitende Dreiein* von x aus den 3 Einheitsvektoren:

1. Tangentenvektor $\dot{x}(s)$
2. Normalvektor $n(s) := \frac{\ddot{x}}{\|\ddot{x}\|}$
3. Binormalvektor: $b := \dot{x} \times n$

Die durch $\dot{x}(s)$ und $n(s)$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegebene*.

1.2 Gekrümmte Flächen im Raum

Betrachten 2-dimensionale Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $x : (u, v) \mapsto x(u, v) \in M$, dazu die *Koordinatenvektorfelder*

$$\partial_u := \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \partial_v := \frac{\partial x}{\partial v}$$

und den darüber definierten *Normaleneinheitsvektor*

$$n := \frac{\partial_u \times \partial_v}{\|\partial_u \times \partial_v\|}$$

Die durch die ∂_u, ∂_v Aufgespannte Ebene heißt *Tangentialebene* am jeweiligen Punkt der Fläche. Führen folgende standardisierte Abkürzungen ein:

$$E = \partial_u \cdot \partial_u, \quad F = \partial_u \cdot \partial_v, \quad G := \partial_v \cdot \partial_v$$

$$L := n \cdot \partial_{u^2} = n \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\partial_u \partial_u n$$

$$N := n \cdot \partial_{v^2} := n \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\partial_v \partial_v n$$

$$M := \frac{\partial x}{\partial u \partial v} \cdot n = -\partial_u \partial_v n = -\partial_v \partial_u n$$

1.2.1 Krümmung von Normalschnitten

Es soll nun die Krümmung der Fläche $x(u, v)$ im Punkt P_0 mit den Parametern u_0, v_0 beschrieben werden. Man betrachte dazu die Schnittkurve zwischen einer, durch den Punkt P_0 gehenden, senkrecht zur Tangentialebene stehenden, den Normalenvektor enthaltenden, Ebene und der Fläche. Diese so entstehende Schnittkurve sei nun über ihre Bogenlänge s parametrisiert durch $x(u(s), v(s))$, mit $u(s_0) =: u_0, v(s_0) =: v_0$. Zu berechnen wäre der Krümmungsradius R dieser speziellen Kurve. Mit

$$\dot{x}(s) \cdot n(s) = 0$$

erhält man durch Differenzieren nach $\frac{d}{ds}$ und anschließendem Einsetzen von $s = s_0$ die am Punkt P_0 geltende Beziehung

$$\underbrace{\left(\frac{1}{R}n\right)}_{\frac{1}{R}} \cdot n + \dot{x}(s) \frac{dn}{ds} = 0$$

das heißt es ist

$$\frac{1}{R} = -\dot{x} \frac{dn}{ds} = -\left(\frac{du}{ds} \partial_u + \frac{dv}{ds} \partial_v\right) \cdot \left(\frac{du}{ds} \partial_{u^2} n + \frac{dv}{ds} \partial_{v^2} n\right) = -\left[\underbrace{\left(\partial_u \partial_u n\right)}_{-L} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \underbrace{\left(\partial_u \partial_v n + \partial_v \partial_u n\right)}_{-2M} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \underbrace{\left(\partial_v \partial_v n\right)}_{-N} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$

also

$$\boxed{\frac{1}{R} = L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2}$$

Die diesem Krümmungsradius entsprechende Krümmung heißt *Normalkrümmung* (in Richtung $\dot{x}(s_0)$).

Bemerkung: Ein negativer Radius R bedeutet lediglich dass Flächennormalenvektor und Kurvennormalenvektor entgegengerichtet sind.

1.2.2 Definition: Hauptkrümmungen, Mittelkrümmung und Gauß-Krümmung

Minimalwert und Maximalwert der Normalkrümmungen an einem Punkt P_0 einer 2-dimensionalen Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, bezeichnet man als *Hauptkrümmungen* k_1, k_2 bzw. die entsprechenden Radien als *Hauptkrümmungsradien*. Das arithmetische Mittel

$$k_1 + k_2$$

bezeichnet man als *Mittelkrümmung* und deren Produkt

$$k_1 \cdot k_2$$

als Gauß-Krümmung.

1.2.3 Berechnung der Hauptkrümmungen

Zu klären wäre zum einen, welche Werte die Zahlenpaare

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right)$$

durch die verschiedenen Normalschnitte annehmen können. Per Konstruktion ist

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i (\dot{x}^i)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right)^2 \\ &= \underbrace{\left[\sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \right)^2 \right]}_E \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \underbrace{\left[\sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial v} \right)^2 \right]}_G \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2 \underbrace{\left[\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^i}{\partial v} \right]}_F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Berechnung der Hauptkrümmungen (extremale Krümmungen) entspricht also dem Lösen der Extremwertaufgabe mit der Zielfunktion

$$f(\xi, \eta) = L\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(\xi, \eta) = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$$

Wird f für (ξ, η) unter dieser Nebenbedingung extremal, so muss ein Lagrange-Multiplikator λ existieren, mit

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \lambda \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) = 2L\xi + 2M\eta - 2\lambda E\xi - 2\lambda F\eta$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta) - \lambda \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 2M\xi + 2N\eta - 2\lambda F\xi - 2\lambda G\eta$$

Oberes entspricht einem homogenen, linearen Gleichungssystem in den Unbekannten ξ, η . Wegen Gl. 1 ist $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, das heißt die dem Gleichungssystem entsprechende Koeffizientenmatrix muss singulär sein:

$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} = (EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + (LN - M^2)$$

Diese quadratische Gleichung besitzt allgemein 2 Lösungen $\lambda_{1,2}$, mit

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

Behauptung: Die $\lambda_{1,2}$ sind genau die gesuchten Hauptkrümmungen. Tatsächlich folgt aus

$$(L - \lambda E)\xi_i + (M - \lambda_i F)\eta_i = 0 \quad \Big| \cdot \xi_i$$

$$(M - \lambda F)\xi_i + (N - \lambda_i G)\eta_i = 0 \quad \Big| \cdot \eta_i$$

die Beziehung

$$0 = \underbrace{(L\xi_i^2 + 2M\xi_i\eta_i + N\xi_i^2)}_{f(\xi_i, \eta_i) = k_i} - \lambda_i \underbrace{(E\xi_i^2 + 2F\xi_i\eta_i + G\eta_i^2)}_{\substack{1 \\ \text{nach Nebenbedingung}}}$$

Die Gauß-Krümmung ergibt sich demnach als

$$K := k_1 k_2 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2)$$

Die mittlere Krümmung folgt analog

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (3)$$

Bemerkung: Hauptkrümmung, Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung sind alles parametrisierungsinvariante, die Fläche lokal beschreibende, Größen.

1.2.4 Satz: Berechnung von Normalkrümmungen (Satz von Euler)

Es seien k_1, k_2 die Hauptkrümmungen einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ am Punkt P_0 . Dann gilt für die Normalkrümmung k in eine beliebige Tangentialrichtung:

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

wobei φ der Winkel zwischen der speziellen Tangentialrichtung und der zu k_1 gehörigen Tangentialrichtung ist.

2 Differenzierbare Manigfaltigkeiten

2.1 Karten & Atlanten

Gegeben sei eine Menge M .

2.1.1 Definition: Karte

Eine *Karte* von M ist ein Paar (U, φ) mit $U \subset M$ und

$$\varphi : U \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{W} : \text{offen} \wedge \varphi \text{ bijektiv}$$

2.1.2 Definition: Atlas

Ein *Atlas* von M ist ein System von Karten (U_i, φ_i) , $i \in I$ mit $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und aus $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i \neq j$ folgt dass

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beliebig oft differenzierbar ist. (Kartenkompatibilität).

Bemerkung: Man schreibt deshalb auch C^∞ -Atlas. Kompatible Karten haben gleiche Dimension.

Beispiele:

- M sei eine Kugeloberfläche.
- Sei $\mu > 0$, $M := \mathbb{R} \times (2\mu, \infty) \times S_2$ wobei S_2 die Oberfläche der Einheitskugel sei. Jede Karte (U_i, φ_i) auf S_2 erzeugt eine Karte (V_i, ψ_i) auf M :

$$V_i := \mathbb{R} \times (2\mu, \infty) \times U_i, \psi_i(t, r, P) := (t, r, p, q) \text{ mit } (p, q) = \varphi_i(P)$$

2.1.3 Definition: Maximaler Atlas

Zu gegebenen Atlas kann für jede Karte entschieden werden, ob sie zu jeder Karte des Atlas kompatibel ist. Ist dies der Fall, so füge man diese Karte dem Atlas hinzu.

Deshalb Standpunkt: Jeder Atlas lässt sich zu einem *maximalen Atlas* erweitern, in dem jede Karte enthalten ist.

2.2 Topologische Räume

Auf M sei geklärt ob eine reelle Funktion stetig ist.

2.2.1 Definition: Topologischer Raum

Eine nichtleere Menge M ist ein *topologischer Raum* wenn von ihren Teilmengen eine Familie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ ausgezeichnet ist mit den Eigenschaften

- $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
- $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$
- $U_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Diese ausgezeichneten Teilmengen heißen *offen*.

Bemerkung: Ein topologischer Raum wird also beschrieben durch das Paar (M, \mathcal{O}) .

2.2.2 Definition: Hausdorff

Ein topologischer Raum (M, \mathcal{O}) ist *Hausdorff* $:\Leftrightarrow$

$$\forall x_i \neq x_j \in M : \exists U_i, U_j \in \mathcal{O} : x_i \in U_i \wedge x_j \in U_j \wedge U_i \cap U_j = \emptyset$$

2.2.3 Definition: Konvergenz von Folgen

Eine Folge $(x_n) \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$ wenn

$$\forall U \in \mathcal{O}, x \in U : \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U$$

Folgerungen:

- In einem Hausdorff Raum ist der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt.
- In einer Menge M , in der man alle möglichen Untermengen als offen definiert, muss jede konvergente Folge ab einem bestimmten Glied konstant sein, da selbst einzelne Elemente offene Mengen sein würden.
- In einer Menge M , in der man nur die leere Menge und M als offen definiert, ist jede mögliche Folge konvergent.
- Betrachten die 2-dimensionale XY Ebene der reellen Zahlen, und definieren als offen jede Menge J die als Kreuzprodukt von der gesamten Y -Geraden und einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}$ der X -Achse geschrieben werden kann: $J = M \times \mathbb{R}$. Dabei gelte in \mathbb{R} die konventionelle Metrik $d(a, b) = |a - b|$. Dann konvergieren in dem Raum genau die Folgen deren X -Komponente in \mathbb{R} konvergiert.

2.2.4 Definition: Stetigkeit

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei topologischen Räumen ist *stetig* wenn das vollständige Urbild $f^{-1}(G)$ jeder offenen Teilmenge $G \subset N$ auch offen ist.

2.2.5 Definition: Abzählbare Basis

Ein topologischer Raum (M, \mathcal{O}) hat eine *abzählbare Basis* wenn eine Folge von offenen Mengen U_n existiert, so dass jede offene Menge als Vereinigung von solchen U_n darstellbar ist.

2.2.6 Definition: C^∞ -Mannigfaltigkeit

Eine C^∞ -Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und einem C^∞ -Atlas mit Karten (U, φ) wobei U offen und φ homeomorph¹ sind.

Beispiele

- **Untermanigfaltigkeiten:** Gegeben seien $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1 \dots l$ wobei f_i beliebig oft differenzierbar sind. Dabei soll $l < n$ und

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = l \text{ (überall)}$$

$$\text{o.B.d.A} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial \xi_i} \end{array} \right| \neq 0 \text{ (lokal)}$$

sein. Ferner seien

$$f_i(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, l$$

für irgendeinen Punkt $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine (lokale) eindeutige Auflösung

$$(\xi_1, \dots, \xi_l) = \varphi(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n) \quad , \quad \varphi : \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

die erfüllt

$$f_i(\varphi(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n), \xi_{l+1}, \dots, \xi_n) \equiv 0 \quad , \quad i = 1, \dots, l$$

und die Menge

$$M := \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : f_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad i = 1 \dots l\}$$

ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m = n - l$.

¹Eine Funktion f ist *homeomorph* wenn sie bijektiv ist, und f, f^{-1} stetig sind.

3 Tangentenvektoren

3.1 Der Tangentialraum

Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller reellwertigen C^∞ -Funktionen auf M . Analog sei $\mathcal{F}(P)$ definiert als die Menge aller C^∞ -Funktionen die in einer Umgebung von P definiert sind. Ist $f \in \mathcal{F}(M)$ dann ist $f \circ \varphi^{-1}$ beliebig oft differenzierbar für beliebige Karten φ von M .

3.1.1 Definition: Tangentenvektor

Es sei $P \in M$. Eine Abbildung $x : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (L) $x(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot x(f) + \mu \cdot x(g)$
- (P) $x(f \cdot g) = x(f) \cdot g(P) + f(P) \cdot x(g)$

heißt *Tangentenvektor in P* .

Nennen: M_P die Menge aller Tangentenvektoren in P .

Beispiel: M sei Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und γ Kurve auf M mit $\gamma(0) = P$. Dann ist $\dot{\gamma}$ gegeben durch

$$\dot{\gamma}(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h}$$

Für $f \in \mathcal{F}(M)$ (glatt), erfüllt die Zuordnung

$$f \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(\gamma(0))}{h}$$

die Eigenschaften (L) und (P), und ist ferner Tangentenvektor im Sinne obiger Definition.

3.1.2 Satz

Der Raum aller Tangentenvektoren M_P im Punkt P ist ein linearer Raum.

3.1.3 Satz

Ist $x \in M_P$ und f konstant, so ist $x(f) = 0$.

3.1.4 Satz

Wenn f, g auf einer Umgebung U um P übereinstimmen, dann gilt für $x \in M_P : x(f) = x(g)$.

Bemerkungen: Für $x \in M_P$ ist f nur lokal bei P von Bedeutung. Statt $\mathcal{F}(M)$ genügt $\mathcal{F}(P) : 2$ Funktionen sind P -äquivalent, wenn sie auf einer Umgebung von P übereinstimmen. Das ist eine Äquivalenzrelation, und man kann folgende Klasseneinteilung machen:

$$\mathcal{N}(P) := \{f \in \mathcal{F}(M) : \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } P : f(q) = 0 \forall q \in U\}, \hat{\mathcal{F}}(P) := \mathcal{F}(M)/\mathcal{N}(P)$$

$\hat{\mathcal{F}}(P)$ ist also die Menge aller zu $\mathcal{N}(P)$ affiner Unterräume von $\mathcal{F}(M)$ bzw. aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{F}(M)$ bzgl. deren Verhalten um P . Das heisst alle Funktionen einer Klasse $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}(P)$ sind in einer Umgebung von P identisch.

3.2 Erzeugen von Tangentenvektoren

3.2.1 Definition: Kurve

Eine C^∞ -Kurve γ auf einer C^∞ -Mannigfaltigkeit M , ist eine Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, wobei I ein Intervall sei, so dass $\varphi \circ \gamma$ glatt ist für alle Karten φ . Für $f \in \mathcal{F}(P), P = \gamma(0)$ ist $(f \circ \gamma)'(0)$ erklärt, denn $f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$. Die Zuordnung $f \rightarrow (f \circ \gamma)'(0)$ erfüllt (L) und (P), ist also Tangentenvektor, bezeichnet mit $x = \gamma'(0)$.

Berechnen mit einer Karte φ :

$$x(f) = (f \circ \gamma)'(0) = ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(P)) \cdot \frac{du^i}{dt}(0) \quad (4)$$

3.2.2 Definition: ∂_i

Zu P und Karte φ bezeichnet $\frac{\partial}{\partial u^i}(P)$ oder ∂_i oder ∂_{u^i} den Tangentenvektor

$$f \mapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(P))$$

Nach obiger Rechnung (4) gilt

$$x(f) = \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot \frac{\partial u^i}{\partial t}(0)$$

mit

$$\varphi(\gamma(t)) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$$

Ergebnis: Jeder durch eine Kurve γ erzeugte Tangentenvektor ist eine linear-Kombination von $\partial_1, \dots, \partial_n$.

3.3 Die Tangentenvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ als Basis

3.3.1 Satz

Die Tangentenvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ sind linear unabhängig.

3.3.2 Hilfssatz

Zu jeder glatten, reellwertigen Funktion g auf einer Kugel B um $0 \in \mathbb{R}^n$ existieren auf B glatte reellwertige Funktionen g_1, \dots, g_n mit

$$g_i(0) := \frac{\partial g}{\partial u^i}(0), \quad g_i(u) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu) dt$$

so dass auf B gilt

$$g(u) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(u) \cdot u^i$$

3.3.3 Theorem über die Koordinatenvektoren ∂_i

Die Tangentenvektoren $\partial_1(P), \dots, \partial_n(P) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ bilden ein Erzeugendensystem von M_P , und somit davon eine Basis. Definiert man nämlich die Funktionen f_1, \dots, f_n in einer Umgebung von P , mit $f_k(Q) := u^k$ wobei $\varphi(Q) = (u^1, \dots, u^n)$ so lässt sich jeder Tangentenvektor $x \in M_P$ darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^n (x f_i) \cdot \partial_i(P)$$

Bemerkung: Die Zahlen $x f_i$ sind die Koeffizienten der Linearkombination. Angewandt auf eine beliebige Funktion f ergibt sich

$$x f = \sum_{i=1}^n (x f_i) \cdot \partial_i(P) f = \sum_{i=1}^n (x f_i) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(P))$$

3.4 Vektorfelder

Durch ein Vektorfeld X wird jedem Punkt $P \in M$ ein Tangentenvektor $X(P) \in M_P$ zugeordnet.

3.4.1 Definition: Vektorfeld

Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung $X : M \rightarrow \bigcup_{P \in M} M_P$ mit $X(P) \in M_P$.

Bemerkung: X macht aus einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Funktion $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch folgende Definition:

$$(Xf)(p) := X(p)f$$

Rechenregeln: Es gelten folgende (aus der punktweise Gültigkeit resultierende) Regeln:

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda Xf + \mu Xg$$

$$X(fg) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$$

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Zusatzforderung: Fordern dass aus $f \in \mathcal{F}(M)$ folgt $Xf \in \mathcal{F}(M)$ (aus Glattheit folgt Glattheit), und definieren $\mathcal{X}(M)$ als die Menge aller Vektorfelder auf M die diese Bedingung erfüllen. Analog definiert man $\mathcal{X}(P)$ lokal in einer Umgebung um P .

Die Vektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ heißen *Koordinatenvektorfelder*. Sie sind in jedem Punkt linear unabhängig.

Beachte: Zu Vektorfeldern X_1, \dots, X_n die überall linear unabhängig sind, gibt es im allgemeinen keine Karte, so dass $X_i = \partial_i$.

3.5 Lie-Klammern

Seien $f \in \mathcal{F}(P)$, $X, Y \in \mathcal{X}(P)$. Dann gilt $Xf \in \mathcal{F}(P)$ (per Definition). Ferner gilt $YXf \in \mathcal{F}(P)$, und die Zuordnung $f \rightarrow (Xf)(p)$ ist ein Tangentenvektor.

Beachte: Die Zuordnung $f \rightarrow (YXf)(p)$ ist allgemein kein Tangentenvektor!

3.5.1 Satz

Für Vektorfelder X, Y ist die Abbildung

$$f \rightarrow XYf(P) - YXf(P)$$

ein Tangentenvektor im M_P .

3.5.2 Definition: Lie-Klammer

Die *Lie-Klammer* $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(P) \times \mathcal{X}(P) \rightarrow \mathcal{X}(P)$ ist die Operation die $X, Y \in \mathcal{X}(P)$ das Vektorfeld

$$[X, Y](P)f = XYf(P) - YXf(P)$$

zuordnet, d.h.

$$[X, Y]f = XYf - YXf$$

oder besser

$$[X, Y] = XY - YX$$

3.5.3 Satz

Für zwei Koordinatenvektorfelder ∂_i, ∂_j ist $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Schwarz

$$\partial_i \partial_j f = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} (f \circ \varphi^{-1}) \right) = \partial_j \partial_i f$$

3.5.4 Eigenschaften der Lie-Klammer

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$
- $[\lambda X, \mu Y] = \lambda \mu [X, Y]$ wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten seien.

3.5.5 Satz

Für skalare Felder f, g und Vektorfelder X, Y gilt

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

Bemerkung: Xf definiert durch $(Xf)(P) := X(P)f$ ist ein skalares Feld, wobei (fX) definiert durch $(fX)(P) := f(P) \cdot X(P)$ ein Vektorfeld ist.

Folgerung: Für

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \cdot \partial_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \cdot \partial_i, \quad X^i, Y^i : M \rightarrow \mathbb{R}$$

gilt

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \right] \partial_j$$

Bemerkung: Jedes Vektorfeld kann an jedem Punkt als *Linearkombination* der Koordinatenvektorfelder geschrieben werden. Die Koeffizienten sind dabei abhängig von $P \in M$ und werden in Form der X^i, Y^i als skalare Funktionen betrachtet.

3.5.6 Satz: Die Jacobi Identität

Es gilt

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Bemerkungen: Seien $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$ und $P \in M$.

Der Ausdruck (Xf) ist eine skalare und der Ausdruck X eine vektorielle Abbildung.

Der Ausdruck $X(P)$ ist ein Tangentenvektor, also eine Funktion von $\mathcal{F}(M)$ in \mathbb{R} . Somit ist $X_P f := (Xf)(P)$ ein Skalar.

Da Xg eine skalare Funktion ist, ist $Y(Xg)$ auch wieder eine skalare Funktion. Analog ist auch $Z(Y(Xg))$ eine skalare Funktion. Doch die Ausdrücke $YXf(P) := Y_P(Xf)$ und $ZYXf(P) := Z_P YXf$ sind beide skalare Werte.

4 Tensoren

4.1 Summenkonvention

Per Konvention, ist über Indizes, die in einem Ausdruck zweimal auftreten, einmal als unterer und einmal als oberer, aufzusummieren. Dabei ist die Konventionelle Positionierung von Indizes wie folgt:

Index unten	Index oben
Nummerieren von Vektoren	Indizieren der Komponenten eines Vektors
Komponenten von Linearformen	Nummerieren von Linearformen
Spaltenindex einer Matrix	Zeilenindex einer Matrix

4.2 Multilinearformen

Gegeben sei ein linearer Raum E , dazu der Dualraum E^* .²

4.2.1 Definition: Tensor

Sei

$$f : \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_{p\text{-mal}} \times \underbrace{E \times \dots \times E}_{q\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

linear in jeder Komponenten. Dann heißt f (p, q) -Tensor. Ein (p, q) -Tensor ist p -fach *kontravariant* und q -fach *kovariant*.

Beispiel: Die lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(E, E)$ erzeugt einen $(1, 1)$ Tensor $\langle Tx, a \rangle \in \mathbb{R}$ wobei $a \in E^*$, $x \in E$.

Bemerkung: Für $x \in E$, $a \in E^*$ definiert man

$$\langle x, a \rangle := a(x)$$

Der Ausdruck ist linear in beiden Komponenten.

4.2.2 Satz

Der Raum aller multilinearer Abbildungen von $(E^*)^p \times E^q$ nach \mathbb{R} , ist Isomorph zu E_q^{p+1} mit einem von der Auswahl einer Basis in E unabhängigen Isomorphismus.

Bemerkung: Zu $p, q \in \mathbb{N}_0$ definiert man E_q^p als den Raum aller (p, q) Tensoren über E .

4.2.3 Definition: Duale Basis

Sei E ein n -dimensionaler Vektorraum. Zur Basis $x_1, \dots, x_n \in E$ ist die *duale Basis* $a^1, \dots, a^n \in E^*$ definiert durch

$$a^j(x_i) := \delta_{ij}$$

Beispiel: Zu $x_1, \dots, x_p \in E$ und $a^1, \dots, a^q \in E^*$ ist

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^q(b^1, \dots, b^p, y_1, \dots, y_q) := \langle x_1, b^1 \rangle \cdot \dots \cdot \langle x_p, b^p \rangle \cdot \langle y_1, a^1 \rangle \cdot \dots \cdot \langle y_q, a^q \rangle$$

ein (p, q) Tensor.

4.2.4 Satz

Sei $x_1, \dots, x_n \in E$ eine Basis des linearen Raumes E und dazu a^1, \dots, a^n die duale Basis in E^* . Dann bilden die Tensoren

$$x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q}$$

eine Basis von E_q^p . Folglich gilt $\dim E_q^p = n^{p+q}$.

²Eine Linearform auf E ist eine Lineare Abbildung $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ und der Dualraum E^* ist der Raum aller Linearformen auf E . Es gilt $\dim(E) = \dim(E^*)$.

Beweis:

a) **Lineare Unabhängigkeit:** Sei

$$\lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q} = 0$$

wobei nach wie vor die Summenkonvention gelte. Insbesondere

$$0 = \lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot \underbrace{x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q}}_{\langle x_{i_1}, a^{i_1} \rangle \cdot \dots \cdot \langle x_{i_p}, a^{i_p} \rangle \langle x_{j_1}, a^{j_1} \rangle \cdot \dots \cdot \langle x_{j_q}, a^{j_q} \rangle} = \lambda_{j_1', \dots, j_q'}^{i_1', \dots, i_p'}$$

$$\text{Da : } \langle x_{i_k}, a^{i_k} \rangle = \delta_{i_k, i_k'}, \langle x_{j_1}, a^{j_1} \rangle = \delta_{j_1, j_1'} \quad \square$$

b) **Erzeugende: Jeder (p, q) Tensor ist Linearkombination:**

$$f = \lambda_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q}$$

Insbesondere:

$$f \left(a^{i_1'}, \dots, a^{i_p'}, x_{j_1'}, \dots, x_{j_q'} \right) = \lambda_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q} \left(a^{i_1'}, \dots, a^{i_p'}, x_{j_1'}, \dots, x_{j_q'} \right) = \lambda_{j_1', \dots, j_q'}^{i_1', \dots, i_p'}$$

Also: Einzige Chance ist

$$f = f \left(a^{i_1}, \dots, a^{i_p}, x_{j_1}, \dots, x_{j_q} \right) x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_q}$$

Gleichheit stimmt für Basiselemente. Wegen Multilinearität stimmt jedoch Gleichheit auch allgemein! \square

4.2.5 Definition: Tensor-Koeffizienten

Die Koeffizienten

$$f_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := f \left(a^{i_1}, \dots, a^{i_p}, x_{j_1}, \dots, x_{j_q} \right)$$

sind die Komponenten des (p, q) Tensors f bzgl. der Basis x_1, \dots, x_n .

4.2.6 Satz

Seien $x_1, \dots, x_n \in E$ und $y_1, \dots, y_n \in E$ Basen des linearen Raumes E , und dazu a^1, \dots, a^n und b^1, \dots, b^n die entsprechenden Dualbasen. Die Matrizen $A \equiv (\alpha_i^j)$ und $B \equiv (\beta_l^k)$ seien charakterisiert durch $y_i = \alpha_i^j x_j$ und $b^k = \beta_l^k a^l$. Dann sind die Matrizen invers zu einander!

Beweis:

$$\delta_{ik} = \langle y_i, b^k \rangle = \langle \alpha_i^j x_j, \beta_l^k a^l \rangle = \alpha_i^j \beta_l^k \cdot \langle x_j, a^l \rangle = \alpha_i^j \beta_j^k = \beta_j^k \alpha_i^j \equiv (BA)_i^k \quad \square$$

4.2.7 Satz

Es seien $f_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ die Komponenten von f bzgl. der Basis $x_1, \dots, x_n \in E$. Dann sind die Komponenten von f bzgl. der Basis y_1, \dots, y_n die Zahlen:

$$\beta_{l_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot \beta_{l_p}^{i_p} \cdot f_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} \cdot \alpha_{j_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{j_q}^{k_q}$$

4.3 Operationen

Der Raum E_q^p ist ein linearer Raum. Dabei sei erklärt:

- $(f + g)(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q) := f(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q) + g(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q)$
Die Koeffizienten sind dann

$$(f + g)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = f_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + g_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

- $(\lambda f)(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q) := \lambda \cdot f(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q)$ und entsprechend

$$(\lambda f)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \lambda \cdot f_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

4.3.1 Definition: Tensor Multiplikation

Für $f \in E_q^p$, $g \in E_s^r$ ist $f \otimes g \in E_{q+s}^{p+r}$ definiert durch

$$(f \otimes g)(a^1, \dots, a^{p+r}, x_1, \dots, x_{q+s}) := f(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q) \cdot g(a^{p+1}, \dots, a^{p+r}, x_{q+1}, \dots, x_{q+s})$$

Die Operation $\otimes : E_q^p \times E_s^r \rightarrow E_{q+s}^{p+r}$ bezeichnet die *Tensormultiplikation*. Die Koeffizienten ergeben sich als

$$(f \otimes g)_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = f_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot g_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}$$

Bemerkung: \otimes verallgemeinert die früher eingeführte Bedeutung von \otimes .

Rechenregeln:

- $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- $(f + g) \otimes h = (f \otimes h) + (g \otimes h)$
- $f \otimes (g + h) = (f \otimes g) + (f \otimes h)$
- $(\lambda f) \otimes g = \lambda(f \otimes g) = f \otimes (\lambda g)$

4.3.2 Definition: Kontraktion

Betrachten (p, q) -Tensor $f \in E_q^p$. Sei $r \in \{1, \dots, p\}$, $s \in \{1, \dots, q\}$. Dann definiert man den Tensor $C_s^r f \in E_{q-1}^{p-1}$ durch

$$(C_s^r f)(a^1, \dots, a^{r-1}, a^{r+1}, \dots, a^p, x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_q) := f(a^1, \dots, a^{r-1}, b^k, a^{r+1}, \dots, a^p, x_1, \dots, x_{s-1}, y_k, x_{s+1}, \dots, x_q)$$

wobei: $y_1, \dots, y_n \in E$ eine Basis in E und dazu b_1, \dots, b_n die Dualbasis in E^* seien.

Bemerkung: $C_s^r f$ hängt nicht von der Auswahl der Basis y_1, \dots, y_n ab. Somit ergibt die obere Notation Sinn ohne Angabe einer Basis.

Beispiel: Die lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(E, E)$ ist ein $(1, 1)$ Tensor, dessen Komponenten die Matrixelemente sind. Seine Kontraktion ist die Spur der Matrix.

4.3.3 Definition: Überschiebung

Die Operation $f, g \rightarrow C_v^u(f \otimes g)$ heißt *Überschiebung* von f und g . Dabei wird jeweils ein Argument von f und g entfernt. Das heißt für $f \in E_q^p$, $g \in E_s^r$, $C_v^u(f \otimes g)$ ist

$$(u \leq p \wedge v > q) \vee (u > p \wedge v \leq q)$$

Beispiel: Für $T \in (E, E)$ und $x \in E$ ist Tx die Überschiebung von T und x .

4.4 Bilinearformen

Sei $g \in E_2^0$ mit Komponenten g_{ik} bzgl. der Basis $x_1, \dots, x_n \in E : g_{ik} = g(x_i, x_k)$. Dann ist

$$g(A, B) = g(A^i x_i, B^k x_k) = A^i B^k g(x_i, x_k) = g_{ik} A^i B^k, \quad A, B \in E$$

Basis Transformation: Umrechnung der Matrix (g_{ik}) auf eine andere Basis $x'_1, \dots, x'_n : x'_j = \tau_j^i x_i$.

$$g'_{jl} = g(\tau_j^i x_i, \tau_l^k x_k) = g_{ik} \tau_j^i \tau_l^k = \tau_j^i g_{ik} \tau_l^k$$

In Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g'_{11} & \cdots & g'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g'_{n1} & \cdots & g'_{nn} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_1^1 & \cdots & \tau_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n^1 & \cdots & \tau_n^n \end{pmatrix}}_{T^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_1^1 & \cdots & \tau_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n^1 & \cdots & \tau_n^n \end{pmatrix}}_T$$

4.4.1 Theorem: (Sylvester)

Zu jeder symmetrischen Bilinearform g auf n -dimensionalen reellen Raum E gibt es eine Basis $x_1, \dots, x_n \in E$, so dass die Komponentenmatrix von g bzgl. dieser Basis die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & & & & & 0 \\ 0 & & & -1 & & & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & & & -1 & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei p "1"-en und q "-1"-en illustriert seien.

Bemerkung: Die Werte p, q sind unabhängig von der Auswahl der Basis.

4.4.2 Definition: Definitionen zu Bilinearformen

Eine Bilinearform g auf E ist:

- *Symmetrisch* wenn $g(x, y) = g(y, x) \forall x, y \in E$
- *Nicht ausgeartet* wenn $\text{rang}(g_{ik}) = n$
Dann bestehen die Diagonalelemente bzgl. der oben erwähnten Basis nur aus ± 1
- *Positiv definit* wenn $x \neq 0 \Rightarrow g(x, x) > 0$
Dann bestehen die Diagonalelemente nur aus $+1$
- *Positiv semidefinit* wenn $g(x, x) \geq 0 \forall x$
- *Negativ semidefinit* wenn $g(x, x) \leq 0 \forall x$
- *Negativ definit* wenn $x \neq 0 \Rightarrow g(x, x) < 0$

Man definiert als die *Signatur* einer symmetrischen Bilinearform, das System von Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, wobei ε_i das i -te Diagonalelement ist (± 1 oder 0).

4.4.3 Satz

Für eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $x \xrightarrow{J} g(x, \cdot)$ ein Isomorphismus: $J : E \rightarrow E^*$. Zu jeder Linearform $f \in E^*$ gibt es somit genau ein $x \in E$ so dass $f = g(x, \cdot)$ ist: $x = J^{-1}f$

4.4.4 Satz

Der n -dimensionale \mathbb{R} -lineare Raum E sei ausgestattet mit einer nicht ausgearteten symmetrischen bilinearform g . Für die Basis x_1, \dots, x_n in E gelte:

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ \varepsilon_i & : i = j \end{cases}$$

Dann ist $\varepsilon_1 Jx_1, \dots, \varepsilon_n Jx_n$ die zu x_1, \dots, x_n duale Basis.

4.5 Indexziehen

4.5.1 Indexziehen von oben nach unten

Der lineare Raum E sei ausgestattet mit einer nicht ausgearteten Bilinearform g . Sei $f \in E_q^p$ ein (p, q) -Tensor. Ein Linearformeingang x_0 wird ausgewählt (z.B. der letzte) und wird ersetzt durch Jx_0 . Dadurch entsteht ein $(p-1, q+1)$ -Tensor h , definiert durch:

$$h(a^1, \dots, a^{p-1}, x_0, x_1, \dots, x_q) := f(a^1, \dots, a^{p-1}, Jx_0, x_1, \dots, x_q)$$

Nun stellt sich die Frage: Wie berechnen sich die Komponenten von h aus den Komponenten von f ?

Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in E und d^1, \dots, d^n die entsprechende Dualbasis. Dann hat $Je_{j_0} = g(e_{j_0}, \cdot)$ die Komponenten $g(e_{j_0}, e_k) = g_{j_0 k}$. Also $Je_{j_0} = g_{j_0 k} d^k$.

$$\begin{aligned} h_{j_0 j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1}} &= h(d^{i_1}, \dots, d^{i_{p-1}}, e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = f(d^{i_1}, \dots, d^{i_{p-1}}, g_{j_0 k} d^k, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \\ &= g_{j_0 k} \cdot f_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} k} = g_{j_0 k} \cdot f(d^{i_1}, \dots, d^{i_{p-1}}, d^k, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \end{aligned}$$

Oberes Verfahren nennt man *Indexziehen von oben nach unten*.

4.5.2 Indexziehen von unten nach oben

Beruhet auf 2-fach Kontravarianten Tensor $l \in E_0^2$ definiert durch:

$$l(a, b) := g(J^{-1}a, J^{-1}b)$$

4.5.3 Satz

Die Komponentenmatrizen (g_{ij}) , (l^{km}) sind zu einander invers.

Beweis: Die Matrizen beziehen sich auf Basis $x_1, \dots, x_n \in E$, dazu dual $a^1, \dots, a^n \in E^*$.

$$l(Jx_i, a^k) = g(x_i, J^{-1}a^k) = \langle x_i, J(J^{-1}a^k) \rangle = \langle x_i, a^k \rangle = \delta_i^k$$

Außerdem

$$l(Jx_i, a^k) = l(g_{ij}a^j, a^k) = g_{ij}l(a^j, a^k) = g_{ij}l^{jk} \quad \square$$

Sei nun $f \in E_q^p$, dazu $h \in E_{q-1}^{p+1}$ definiert durch

$$h(a^0, \dots, a^p, x_1, \dots, x_{q-1}) := f(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_{q-1}, J^{-1}a^0)$$

Frage: Wie sehen die Komponenten von h aus? Sei dazu $e_1, \dots, e_n \in E$ die Basis und d^1, \dots, d^n die entsprechende Dualbasis.

Behauptung: $J^{-1}d^k = l^{km} e_m$

Beweis:

$$J(l^{km} e_m) = l^{km} J e_m = l^{km} g_{mj} d^j = \delta_j^k d^j = d^k$$

Demnach folgt schließlich:

$$h_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_0 \dots i_p} = h(d^{i_0}, \dots, d^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q-1}}) = f(d^{i_1}, \dots, d^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{q-1}}, g^{im} e_m) = g^{i_0 m} \cdot f_{j_1 \dots j_{q-1} m}^{i_1 \dots i_p}$$

5 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

5.1 Tensorfelder

Bezeichnung: M_P : Tangentialraum zu $P \in M$, und $(M_P)^* = (M_P)_1^0$ Kotangentialraum (Dualraum zu M_P).

5.1.1 Definition: Kovektorfeld (Form, 1-Form)

Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Dann ist ein *Kovektorfeld* K eine Abbildung $K : M \rightarrow (M_P)_1^0$, die jedem Punkt $Q \in M$ eine Linearform $K(Q) \in (M_P)_1^0$ zuordnet, und für jedes glatte Vektorfeld X , $\langle X, K \rangle$ beliebig oft differenzierbar ist, wobei

$$\langle X, K \rangle \in \mathcal{F}(M), \quad \langle X, K \rangle (P) := K(P)(X(P))$$

Bezeichnung: $\mathcal{K}(M)$: Raum aller Kovektorfelder auf M .

Analogue: $\mathcal{K}(P)$: Raum aller Kovektorfelder definiert lokal um $P \in M$.

Zu Karte um P sind die Formen $du^1, \dots, du^n \in \mathcal{K}(P)$ definiert durch

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, du^k \right\rangle = \langle \partial_i, du^k \rangle := \delta_i^k$$

Bemerkungen:

- du^1, \dots, du^n sind die duale Basis von $(M_P)^*$
- Für beliebiges Kovektorfeld $K \in \mathcal{K}(P)$ ist also $K = K_i du^i$, mit den skalaren Koeffizientenfunktionen K_i .

5.1.2 Definition: Tensorfeld

Ein (p, q) -*Tensorfeld* T ist eine Abbildung $T : M \rightarrow (M_P)_q^p$ die jedem Element $P \in M$ einen (p, q) Tensor auf M_P zuordnet. Dabei fordert man: Sind $K^1, \dots, K^p, X_1, \dots, X_q$ glatt, so ist $T(K^1, \dots, K^p, X_1, \dots, X_q)$ ebenfalls glatt.

Bezeichnung: $\mathcal{T}_q^p(M)$: Raum aller (p, q) Tensorfelder auf M .

Analogue: $\mathcal{T}_q^p(P)$: Raum aller (p, q) Tensorfelder definiert in einer Umgebung von $P \in M$. Ein (p, q) Tensorfeld $T \in \mathcal{T}_q^p(P)$ erzeugt durch Einsetzen eine multilineare Abbildung

$$A : \mathcal{K} \times \dots \times \mathcal{K} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$$

Bemerke: Nicht jede solche multilineare Abbildung wird durch ein Tensorfeld erzeugt!

5.1.3 Definition: \mathcal{F} -homogene Abbildungen

Eine multilineare Abbildung $A : \mathcal{K} \times \dots \times \mathcal{K} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ ist \mathcal{F} homogen wenn:

$$A(f_1 K^1, \dots, f_p K^p, g^1 X_1, \dots, g^q X_q) = f_1 \dots f_p g^1 \dots g^q \cdot A(K^1, \dots, K^p, X_1, \dots, X_q)$$

für skalare Felder $f_1, \dots, f_p, g^1, \dots, g^q$.

5.1.4 Satz über \mathcal{F} -homogene Abbildungen

Jede durch ein Tensorfeld erzeugte Abbildung ist \mathcal{F} -homogen (folgt aus Definition des Tensorfeldes).

Umgekehrt: Ist A \mathcal{F} -homogen, dann gibt es dazu ein Tensorfeld was die Abbildung in der beschriebenen Weise erzeugt.

Beweis: Sei $A : \mathcal{K} \times \dots \times \mathcal{K} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ eine \mathcal{F} -homogene lineare Abbildung. Sei $P \in M$ beliebig, und

$$a^1, \dots, a^p \in M_P^*, x_1, \dots, x_q \in M_P$$

Wir setzen $a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q$ fort zu Kovektorfeldern K^1, \dots, K^p und Vektorfelder X_1, \dots, X_q , und machen den Ansatz für ein erzeugendes Tensorfeld $T : M \rightarrow (M_P)_q^p$

$$T(P)(a^1, \dots, a^p, x_1, \dots, x_q) := A(K^1, \dots, K^p, X_1, \dots, X_q)(P)$$

Unabhängigkeit von der Vortsetzung: Wählen eine Karte um P und definieren dadurch die Koordinatenvektorfelder

$$\partial_1, \dots, \partial_n, du^1, \dots, du^n$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} A(K^1, \dots, X_q)(P) &= A\left(K_{i_1}^1 du^{i_1}, \dots, K_{i_p}^p du^{i_p}, X_1^{j_1} \partial_{j_1}, \dots, X_q^{j_q} \partial_{j_q}\right) \\ &= K_{i_1}^1(P) \dots K_{i_p}^p(P) X_1^{j_1}(P) \dots X_q^{j_q}(P) \cdot A(du^{i_1}, \dots, du^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})(P) \\ &= a_{i_1}^1 \dots a_{i_p}^p x_1^{j_1} \dots x_q^{j_q} \cdot A(du^{i_1}, \dots, du^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})(P) \end{aligned}$$

unabhängig von der Fortsetzung!

Bemerkung: Die Lineare Abbildung

$$A(K, X, Y) := \langle [X, Y], K \rangle$$

ist nicht \mathcal{F} -homogen, d.h die Lie Klammer ist kein $(2, 1)$ -Tensorfeld!

5.1.5 Definition: (Semi)-Riemansche Mannigfaltigkeit

Eine *Semi-Riemansche (Pseudo-Riemansche) Mannigfaltigkeit* ist eine endlich dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit mit zweifach kovarianten, symmetrischem Tensorfeld g , wobei $g(P)$, $P \in M$ nicht ausgeartet ist. Dabei nennt man g : *Metrik* oder *Fundamentaltensorfeld*.

Zu g gibt es dann auch ein $(2, 0)$ Tensorfeld g' , 2-fach Kontravariant.

5.1.6 Definition: Bogenlänge

Für Kurven $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ mit $g(\gamma', \gamma') \geq 0$ definiert man die Bogenlänge

$$s(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

Formal schreibt man:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \sqrt{g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}} dt \\ \Rightarrow ds^2 &= g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} dt^2 = g_{ik} du^i du^k \end{aligned}$$

Begründung: Diese Schreibweise wird ersichtlich wenn man bedenkt:

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = g((\gamma' f^i) \partial_i, (\gamma' f^k) \partial_k) = (\gamma' f^i) \cdot (\gamma' f^k) \cdot g_{ik} = \frac{d(f^i \circ \gamma)}{dt} \cdot \frac{d(f^k \circ \gamma)}{dt} \cdot g_{ik} = \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} g_{ik}$$

(Vgl. 3.3.3)

Beispiele: Bogenelement in kartesischen Koordinaten:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bogenelement in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

5.1.7 Definition: Riemansche Mannigfaltigkeit

Eine *Riemansche Mannigfaltigkeit* ist eine Semi-Riemansche Mannigfaltigkeit mit $g(P)$ positiv definit.

5.1.8 Definition: Lorenz-Mannigfaltigkeit

Eine *Lorenz-Mannigfaltigkeit* ist eine Semi-Riemansche Mannigfaltigkeit wobei g die Signatur + - - - oder - + + + hat.

5.1.9 Definition: Orientierte Mannigfaltigkeit

Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit bei der M_P orientiert sind und kompatibel sind.

Bemerkung: Die Orientierung bezieht sich auf die Einteilung der Basen in zwei Äquivalenzklassen bzgl. ihrer *Orientierung*. Dabei sind zwei Basen A und B äquivalent bzw. *gleich orientiert* $:\Leftrightarrow$

$$\det(T_A^B) > 0$$

Diese Äquivalenzrelation ist wohldefiniert und es gibt tatsächlich nur zwei Äquivalenzklassen. Letzteres sichert der Determinantenmultiplikationssatz sowie die Tatsache, dass Basistransformationen umkehrbar sind. Man nennt nun jede dieser beiden Äquivalenzklassen eine Orientierung.

Es sei also festgelegt welche der beiden Orientierungen in den M_P die *ausgewählte* sei. Durch die Festlegung einer Karte und somit eines Koordinatenvektorfeldes $\partial_1, \dots, \partial_n$ setzt sich die Forderung an das Feld an jedem Punkt $P \in M$ die *ausgewählte* Orientierung zu haben. Ist dies ohne Konflikte an den Überschneidungszonen zwischen den Karten möglich, so ist die Mannigfaltigkeit *orientierbar*.

5.1.10 Definition: Zeitorientierte Lorenz Mannigfaltigkeit

Eine *zeitorientierte Lorenz Mannigfaltigkeit* ist eine Lorenz-Mannigfaltigkeit, bei der die Signatur von g genau + - - - ist und in jedem M_P die Menge

$$\{x \in M_P : g(x, x) > 0\}$$

aus zwei disjunkten Hyperkegeln besteht, einer von beiden ausgewählt sei und diese ausgewählten Kegel kompatibel zu einander sind.

5.2 Raumzeit

5.2.1 Definition: Raumzeit

Eine *Raumzeit* ist eine 4-Dimensionale, orientierte und zeitorientierte Lorenz - Mannigfaltigkeit.

5.2.2 Definition: Arten von Vektoren

Sei $x \in M_P$. Dann heißt x :

- *Zeitartig* $:\Leftrightarrow g(x, x) > 0$. Insbesondere gibt es *Zukunftsreisende* zeitartige Vektoren.
- *Raumartig* $:\Leftrightarrow g(x, x) < 0 \vee x = 0$
- *Lichtartig* $:\Leftrightarrow g(x, x) = 0 \wedge x \neq 0$

5.2.3 Definition: Lorenz-Basis

Sei e_0, e_1, e_2, e_3 Basis in M_P mit:

- $g(e_i, e_k) = 0$ für $i \neq k$
- $g(e_0, e_0) = 1$
- $g(e_i, e_i) = -1$ für $i > 0$

Dann heißt e_0, e_1, e_2, e_3 *Lorenz-Basis*.

Bemerkungen: Für den Vektor $x \in M_P$ sei

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

Dann ist

$$g(x, x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Der Vektor x ist also zeitartig wenn $x^0 > \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ oder $x^0 < -\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ gilt. Anschaulich bedeutet dies: x befindet sich innerhalb des Doppelkegels

$$K := \left\{ x \in M_P : |x^0| > \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \right\} \subset M_P$$

Ist $x \in K$, dann ist auch für $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in K$. Ein lichtartiger Vektor x würde dagegen genau auf der *Fläche* des Kegels liegen.

Wir legen (willkürlich) fest, dass

$$K^+ := \left\{ x \in M_P : x^0 > \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \right\} \subset K$$

der *Zukunftskegel* sei.

Bemerkungen:

- Ein Vektor $x \in K^+$ heißt *zukunftsreichend*.
- Ist $x \in K^+$ dann gilt für $\lambda > 0 : \lambda x \in K^+$
- Sind $x, y \in K^+$ so ist für $\lambda, \mu > 0 : \lambda x + \mu y \in K^+$
- Sind x, y zukunftsreichend, so ist $g(x, y) > 0$

Beispiel: Schwarzschild Raumzeit: Betrachten die Raumzeit $M := \mathbb{R} \times (2\mu, \infty) \times S_2$, wobei S_2 die Oberfläche der Einheitskugel im 3-dimensionalen Raum sei. Sei $f \in \mathcal{F}$, $f = f(t, r, Q)$, $Q \in S_2$.

Dann definiert man die Basis $e_0, e_1, e_2, e_3 \in M_P$:

$$e_0 f = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad e_1 f = \frac{\partial f}{\partial r}$$

mit e_2 und e_3 als positiv orientierte Basis in der Tangentialebene zu S_2 am Punkt Q . Die *Metrik* g_{ik} ist definiert als

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\mu}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

wobei (α_{ij}) die negierte Metrik auf der Kugel im \mathbb{R}^3 ist. Insbesondere ist für $Q = Q(\vartheta, \varphi)$:

$$e_2 f = \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \quad e_3 f = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \rightarrow (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\mu}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

5.2.4 Satz über euklidische Unterräume

Für jedes $x \in M_P$ mit $g(x, x) > 0$ ist

$$x^\perp := \{y \in M_P : g(x, y) = 0\}$$

ein Euklidischer Raum bzgl. $-g$.

Beweis: Sei $y \neq 0$ und $g(x, y) = 0$. Dann ist zu zeigen: $g(y, y) < 0$. Wir wählen eine Lorenz-Basis e_0, e_1, e_2, e_3 . Dann sei $x = x^i e_i$ und $y = y^i e_i$. Dann können wir schreiben

$$g(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = 0 \rightarrow |x^0| \cdot |y^0| = |x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3| \leq \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \cdot \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}$$

Da $g(x, x) > 0$ ist, gilt

$$|x^0| > \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

und da $y \neq 0$, $g(x, y) = 0$ sind, ist $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 \neq 0$, denn wäre dies der Fall, so müsste

$$x^0 y^0 = 0 \rightarrow x^0 = 0 \rightarrow g(x, x) \leq 0$$

sein. Also folgt

$$\begin{aligned} |x^0| \cdot |y^0| &\leq |x^0| \cdot \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2} \rightarrow (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 = g(y, y) < 0 \\ &\rightarrow -g(y, y) > 0 \quad \square \end{aligned}$$

5.2.5 Satz

Seien x, z zukunftsreisend, und $g(x, x) = g(z, z) = 1$. Dann ist $g(x, z) \geq 1$.

Beweis: Wir ergänzen x zu einer Lorenzbasis x, e_1, e_2, e_3 . Dann gilt:

$$z = g(z, x) \cdot x - g(z, e_1) \cdot e_1 - g(z, e_2) \cdot e_2 - g(z, e_3) \cdot e_3$$

Somit

$$1 = g(z, z) = g(z, x)^2 - g(z, e_1)^2 - g(z, e_2)^2 - g(z, e_3)^2 \leq g(z, x)^2$$

Da x, z beide im Zukunftskegel sind, gilt $g(x, z) > 0$ und demzufolge

$$g(x, z) \geq 1 \quad \square$$

6 Spezielle Relativitätstheorie

6.0.6 Einführung: Newton

In der klassischen Newtonschen Theorie war ein Teilchen bzw. Beobachter eine Bahnkurve mit einem Fahrplan $\bar{r}(t)$ im \mathbb{R}^3 . Dabei war \bar{r}' seine Geschwindigkeit. Wir modifizieren nun die Definition eines Teilchens und verallgemeinern das ganze auf 4 Dimensionen:

$$\hat{r}(t) = (t, \bar{r}(t)) \in \mathbb{R}^4, \quad \hat{r}'(t) = (1, \bar{r}'(t)) \in \mathbb{R}^4$$

Die Metrik sei nun gegeben durch

$$g((s_1, v_1), (s_2, v_2)) := s_1 s_2 - v_1 v_2$$

Der Betrag der Geschwindigkeit speed ist demnach gegeben durch

$$\text{speed} = \sqrt{g(\hat{r}', \hat{r}')} = \sqrt{1 - \underbrace{(\bar{r}'(t))^2}_{\approx 0}} \approx 1$$

Sind $\hat{r}'_1(t) = (1, \bar{r}'_1(t))$ ein Beobachter und $\hat{r}'_2(t) = (1, \bar{r}'_2(t))$ ein Teilchen, so ist die *Relativgeschwindigkeit* v des Teilchens bzgl. des Beobachters gegeben durch

$$\hat{r}'_2(t) - \hat{r}'_1(t) = (0, \bar{r}'_2(t) - \bar{r}'_1(t))$$

Frage: Wie steht diese zur Geschwindigkeit des Beobachters?

$$g(\hat{r}'_1(t), (0, \bar{r}'_2(t) - \bar{r}'_1(t))) \approx g((1, 0), (0, 0)) = 0$$

6.0.7 Definition: Beobachter & Teilchen

Ein *Beobachter* bzw. *Teilchen* ist eine Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ wobei I ein Intervall und M eine Raumzeit sind. Dabei ist die Geschwindigkeit des Teilchens bzw. Beobachters $\gamma'(t) \in M_P$ zukunftsreisend zeitartig:

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$$

Ein Teilchen habe auch eine Ruhemasse m und eine Ladung e .

6.0.8 Definition: Momentanes Teilchen und Beobachter

Ein *momentanes Teilchen* bzw. *momentaner Beobachter* in P ist ein zukunftsreisender Vektor $x \in M_P$ mit $g(x, x) = 1$. Ab nun an werden wir mit Beobachter einen momentanen Beobachter meinen. Das gleiche auch für Teilchen.

6.0.9 Definition: Relativgeschwindigkeit

In der Newtonschen Theorie war die Relativgeschwindigkeit die ein Beobachter x am Teilchen z registriert, gegeben durch

$$x + v = z$$

Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, ist die Relativgeschwindigkeit $v \in x^\perp$ des Teilchens z für den Beobachter x charakterisiert durch

$$z = \lambda(x + v), \quad \lambda > 0$$

6.0.10 Satz über die Relativgeschwindigkeit

Es gilt:

$$v = \frac{z}{g(x, z)} - x$$

Beweis: Wir beginnen mit der Definition $z = \lambda(x + v)$ und bekommen

$$g(z, x) = (\lambda(x + v), x) = \lambda(g(x, x) + g(v, x)) = \lambda \rightarrow z = g(x, z) \cdot (x + v)$$

$$v = \frac{z}{g(x, z)} - x \quad \square$$

6.0.11 Satz über den Betrag der Relativgeschwindigkeit

Die Relativgeschwindigkeit ist immer kleiner als 1 (speed = $\sqrt{-g(v, v)} < 1$). Spezieller:

$$0 \geq g(v, v) > -1$$

Wir haben vorhin gezeigt dass $g(v, v) \leq 0$ ist. Ferner:

$$g(v, v) = g\left(\frac{z}{g(x, z)} - x, \frac{z}{g(x, z)} - x\right) = \frac{g(z, z)}{g(x, z)^2} - 2\frac{g(x, z)}{g(x, z)} + g(x, x) = \frac{1}{g(x, z)^2} - 1 > -1 \quad \square$$

6.0.12 Satz

Es gilt

$$z = \frac{x + v}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

Beweis: Durch $z = \lambda(x + v)$ folgt

$$1 = g(z, z) = \lambda^2 g((x + v), (x + v)) = \lambda^2 (g(x, x) + g(v, v)) = \lambda^2 (1 + g(v, v)) \rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

und dementsprechend

$$z = \frac{x + v}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

6.0.13 Lorentz-Transformation

Sei x ein Beobachter und dazu eine orthonormale Basis $e_1, e_2, e_3 \in x^\perp$ bzgl. $-g$. Demnach ist x, e_1, e_2, e_3 eine Lorentzbasis. Sei x' ein weiterer Beobachter, den x mit einer Relativgeschwindigkeit $v = \beta e_1$ sieht. Wir wählen analog eine orthonormale Basis $e'_1, e'_2, e'_3 \in x'^\perp$:

$$x' = \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_1 = \frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

Diese ist entsprechend auch eine Lorentz-Basis. Seien $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ bzw. $\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ Komponenten eines Teilchens bzgl. der Basis x, e_1, e_2, e_3 bzw. x', e'_1, e'_2, e'_3 . Gesucht ist eine Umrechnung $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3 \leftrightarrow \eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3$. Durch Komponentenvergleich in

$$\eta^0 \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \eta^1 \frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 \stackrel{!}{=} \xi^0 x + \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$$

bekommt man

$$\xi^0 = \frac{\eta^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\eta^1 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\xi^1 = \frac{\beta \eta^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\eta^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\xi^2 = \eta^2, \quad \xi^3 = \eta^3$$

und umgekehrt

$$\eta^0 = \frac{\xi^0 - \beta \xi^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \eta^1 = \frac{\xi^1 - \beta \xi^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Zusammengefasst ergibt sich die *Lorenztransformation*:

$$\begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}$$

Transformation zwischen Beobachtern Ein Beobachter x sieht ein Teilchen z mit der Relativgeschwindigkeit v^1, v^2, v^3 bzgl. der orthonormalen Basis $e_1, e_2, e_3 \in x^\perp$. x sieht aber auch einen anderen Beobachter x' mit der Relativgeschwindigkeit $\beta, 0, 0$. Frage: Was ist die Relativgeschwindigkeit von z bzgl. x' ?

Wir wissen:

$$z = \frac{x + v^i e_i}{\sqrt{1 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2}}, \quad x' = \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dann ist die Relativgeschwindigkeit v' bzgl. x' :

$$\begin{aligned} v' &= \frac{z}{g(x', z)} - x' = \frac{x + v^i e_i}{g\left(\frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, x + v^i e_i\right)} - \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta v^1}} \cdot (x + v^i e_i) - \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v^1} \cdot (x + v^1 e_1)}_{\frac{v^1 - \beta}{1 - \beta v^1} \cdot \underbrace{\frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}_{e'_1}} - \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v^1} \cdot v^2 e_2 + \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v^1} \cdot v^3 e_3 \end{aligned}$$

also:

$$(v')^1 = \frac{v^1 - \beta}{1 - \beta v^1}, \quad (v')^2 = \frac{v^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v^1}, \quad (v')^3 = \frac{v^3 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v^1}$$

6.0.14 Definition: Energie-Impuls Form

Die *Energie-Impuls Form* eines Teilchens z mit Ruhemasse m ist definiert als:

$$p := m \cdot g(z, \cdot) \in M_P^*$$

6.0.15 Definition: Impuls & relative Masse

Ein Beobachter x registriert am Teilchen z den *Impuls*

$$-p = -g(mz, \cdot)$$

eingeschränkt auf x^\perp und die *relative Masse (Energie)* $E = p(x)$

$$E = p(x) = mg\left(\frac{x + v}{\sqrt{1 + g(v, v)}}, x\right) = \frac{m}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

Bemerkung: Aus

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

folgt

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - (\sqrt{-g(v, v)})^2}} \approx m + \frac{m}{2} (\sqrt{-g(v, v)})^2$$

6.0.16 Satz über die Impulskomponenten

Sei x ein Beobachter, und $e_1, e_2, e_3 \in x^\perp$ eine Orthonormalbasis. Sei z ein Teilchen mit Ruhemasse m und Relativgeschwindigkeit v bzgl. x . Dann hat der Impuls die Komponenten:

$$-p_i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

Beweis:

$$p_i = p(e_i) = mg \left(\frac{x + v^k e_k}{\sqrt{1 + g(v, v)}}, e_i \right) = -\frac{mv^i}{\sqrt{1 + g(v, v)}}$$

6.0.17 Umrechnung von Masse und Impuls zwischen Beobachtern

Die Umrechnung zwischen x, e_1, e_2, e_3 auf x', e'_1, e'_2, e'_3 erfolgt wie folgt:

$$x' = \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_1 = \frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

$$\rightarrow E' = p(x') = p \left(\frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{E - \beta(-p_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$-p'_1 = -p \left(\frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{-\beta p(x) - p(e_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-p_1 - \beta E}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3$$

6.0.18 Definition: Feldstärkentensor

Der *Feldstärkentensor* ist ein schief-symmetrisches (antisymmetrisches) (0,2)-Tensorfeld auf M .

6.0.19 Definition: Magnetische & Elektrische Feldstärke

Ein Beobachter x misst:

- Die *elektrische Feldstärke* $E : F(\cdot, x) = g(\cdot, E)$ eingeschränkt auf x^\perp
- Die *magnetische Feldstärke* $B : F(y, z) = g(y \times z, B) \forall y, z$ eingeschränkt auf x^\perp

Bemerkung: Analogie zum \mathbb{R}^3 : Zu jeder schief-symmetrischen Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein $z \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\beta(x, y) = (x \times y) \cdot z \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

7 Differentialformen

7.0.20 Definition: p-Form

Sei E ein n -dimensionaler linearer Raum mit symmetrischem, nichtausgeartetem, 2-fach kovariantem Tensor g . Dann ist eine p -Form f ein schiefsymmetrischer $(0, p)$ -Tensor :

$$f : \underbrace{E \times \dots \times E}_{\times p} \rightarrow \mathbb{R}$$

Bemerkung: Im Sinne der Schiefsymmetrie (Antisymmetrie) sind folgende 3 Aussagen äquivalent:

a)
$$\forall 1 \leq i < j \leq p : f(\dots, \underset{\uparrow i}{x_i}, \dots, \underset{\uparrow j}{x_j}, \dots) = -f(\dots, \underset{\uparrow i}{x_j}, \dots, \underset{\uparrow j}{x_i}, \dots)$$

b)
$$\forall i \leq i < i+1 < p : f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = -f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)$$

c)
$$\forall \mathcal{P} \in S_p : f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)}) = \chi(\mathcal{P}) \cdot f(x_1, \dots, x_p)$$

wobei $\mathcal{P} \in S_p$ eine beliebige Permutation sei.

d)
$$\forall \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S_p : f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)}) = \chi(\mathcal{P})\chi(\mathcal{Q}) \cdot f(x_{\mathcal{Q}(1)}, \dots, x_{\mathcal{Q}(p)}) \quad (5)$$

Eigenschaften von Permutationen - Erinnerung: Für die symmetrische Gruppe

$$S_p := \{\mathcal{P} : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\} : \mathcal{P} \text{ bijektiv}\}$$

aller p -Permutationen gilt:

$$|S_p| = p! \quad \forall \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in S_p : \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \in S_p$$

Wir definieren eine *Transposition* $\mathcal{T} \in S_p$ als eine Permutation mit den Eigenschaften, für ein bestimmtes i, j :

$$\mathcal{T}(i) = j, \mathcal{T}(j) = i, \mathcal{T}(k) = k \quad \forall k \neq i, j$$

Jede Permutation $\mathcal{P} \in S_p$ kann als Verkettung von Transpositionen geschrieben werden:

$$\forall \mathcal{P} \in S_p : \exists \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q \in S_p : \mathcal{P} = \mathcal{T}_1 \circ \dots \circ \mathcal{T}_q$$

Dabei gilt: Für gegebene Permutation \mathcal{P} ist die Zahl p der entsprechenden Transpositionen eindeutig ungerade oder gerade. Somit kann man das *Vorzeichen*, *Charakteristik* oder *Signatur* der Permutation definieren als:

$$\chi(\mathcal{P}) := (-1)^q$$

Dabei gilt:

$$\forall \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in S_p : \chi(\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2) = \chi(\mathcal{P}_1) \cdot \chi(\mathcal{P}_2)$$

Beispiele von p-Formen

- a) Eine Linearform $f \in E^*$ ist eine 1-Form.
- b) Skalare $c \in \mathbb{R}$ sind nach Konvention 0-Formen.

7.0.21 Der Raum aller p-Formen

Betrachten die duale Basis a^1, \dots, a^n zu den Basisvektoren e_1, \dots, e_n . Dann definiert man die Operation:

$$\wedge : E^* \times E^* \rightarrow E_2^0$$

durch

$$a^i \wedge a^j(x_1, x_2) = \langle a^i, x_1 \rangle \cdot \langle a^j, x_2 \rangle - \langle a^i, x_2 \rangle \cdot \langle a^j, x_1 \rangle = x_1^i x_2^j - x_2^i x_1^j$$

Es gilt: $a^i \wedge a^j$ ist bilinear und schiefsymmetrisch, und somit eine 2-Form. Wir definieren ferner:

$$\Lambda^p E^* := \{f : f \text{ ist p-Form auf } E\}$$

Allgemein definiert man:

$$a^{i_1} \wedge a^{i_2} \wedge \dots \wedge a^{i_p}(x_1, \dots, x_p) := \det \begin{pmatrix} \langle x_1, a^{i_1} \rangle & \dots & \langle x_p, a^{i_1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, a^{i_p} \rangle & \dots & \langle x_p, a^{i_p} \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_p^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{i_p} & \dots & x_p^{i_p} \end{pmatrix} = \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \chi(\mathcal{P}) \prod_{j=1}^p \langle x_j, a^{i_{\mathcal{P}(j)}} \rangle$$

Die Operation $\cdot \wedge \dots \wedge \cdot$ ist multilinear und schiefsymmetrisch. Das gleiche gilt auch für die Elemente in deren Bild, d.h.

$$a^{i_1} \wedge a^{i_2} \wedge \dots \wedge a^{i_p} \in \Lambda^p E^*$$

ist auch multilinear und schiefsymmetrisch, und somit eine p-Form.

7.0.22 Satz

Der Raum aller p-Formen $\Lambda^p E^*$ ist Untervektorraum von

$$E_p^0 \cong \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{\times p}$$

der Dimension

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

mit Basis

$$a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$$

wobei

$$\{a^1, \dots, a^n\}$$

die Dualbasis von E sei.

Beweis:

- **Lineare Unabhängigkeit:** Betrachten das einfache Beispiel

$$\lambda \cdot a^1 \wedge a^2 \wedge a^3 + \mu \cdot a^1 \wedge a^2 \wedge a^4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow 0 = (\lambda \cdot a^1 \wedge a^2 \wedge a^3 + \mu \cdot a^1 \wedge a^2 \wedge a^4)(e_1, e_2, e_3) = \lambda \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda$$

Analog: $\mu = 0 \rightarrow a^1 \wedge a^2 \wedge a^3, a^1 \wedge a^2 \wedge a^4$ Linear unabhängig

Durch Verallgemeinerung des Beweises lässt sich analog die lineare Unabhängigkeit für das gesamte System zeigen.

• **Erzeugendensystem:** Zu zeigen wäre dass man $\forall f \in \Lambda^p E^*$ schreiben kann

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p}$$

Wir setzen

$$f_{i_1 \dots i_p} := f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

und machen die Probe:

$$\tilde{f} := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p}$$

$$i \leq j_1 < \dots < j_p \leq n : \tilde{f}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \sum f_{i_1 \dots i_p} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = f_{j_1 \dots j_p}$$

Jetzt beliebige e_{j_1}, \dots, e_{j_p} : Fall: $j_k = j_i \rightarrow \tilde{f}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_p}) = 0 = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_p})$

Alle anderen Kombination von Basisvektoren sind durch Permutationen auf die oberen zurückzuführen. Somit stimmen f und \tilde{f} in den Basisvektoren überein. Wegen Linearität, folgt die Übereinstimmung in allen Vektoren. \square

Somit ist jede p -Form $f \in \Lambda^p E^*$ gegeben durch

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} f_{i_1 \dots i_p} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p} = \frac{1}{p!} \cdot f_{j_1 \dots j_p} a^{j_1} \wedge \dots \wedge a^{j_p}$$

Bemerkung: Die Räume $\Lambda^p E^*$ und $\Lambda^{n-p} E^*$ sind Isomorph, denn

$$\dim \Lambda^p E^* = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Lambda^{n-p} E^*$$

7.0.23 Definition: Alternierung

Wir definieren die *Alternierung*

$$\mathcal{A} : E^* \otimes \dots \otimes E^* \rightarrow \Lambda^p E^* , f \mapsto \mathcal{A}(f)$$

als eine Operation auf $(0, p)$ -Tensoren gemäß

$$\mathcal{A}(f)(x_1, \dots, x_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \chi(\mathcal{P}) f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)})$$

für $f \in E_p^0$.

Beispiel: Es gilt die Identität

$$\mathcal{A}(a^{i_1} \otimes \dots \otimes a^{i_p}) = \frac{1}{p!} \cdot a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p}$$

denn es ist

$$\mathcal{A}(a^{i_1} \otimes \dots \otimes a^{i_p})(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \chi(\mathcal{P}) (a^{i_1} \otimes \dots \otimes a^{i_p})(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \chi(\mathcal{P}) \underbrace{\prod_{k=1}^p \langle a^{i_k}, x_{\mathcal{P}(k)} \rangle}_{(a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_p})(x_1, \dots, x_p)} \quad \square$$

Beispiel: Spezialfall $p = 2$:

$$\mathcal{A}(a^{i_1} \otimes a^{i_2})(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^{i_1} x_2^{i_2} - x_1^{i_2} x_2^{i_1}) = \frac{1}{2} (a^{i_1} \wedge a^{i_2})(x_1, x_2)$$

Weiter gilt: Ist $f \in \Lambda^p E^*$ so ist $\mathcal{A}(f) = f$ und somit $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$, denn

$$\mathcal{A}(f)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \chi(\mathcal{P}) f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{P} \in S_p} \underbrace{[\chi(\mathcal{P})]^2}_1 f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p) \cdot \frac{1}{p!} \underbrace{\sum_{\mathcal{P} \in S_p} 1}_1 \quad \square$$

7.0.24 Definition: Keilprodukt

Das *Keilprodukt*

$$\bigwedge : \Lambda^p E^* \times \Lambda^q E^* \rightarrow \Lambda^{p+q} E^*$$

ist definiert durch

$$f \bigwedge g := \frac{(p+q)!}{p!q!} \cdot \mathcal{A}(f \otimes g), \quad f \in \Lambda^p E^*, \quad g \in \Lambda^q E^*$$

$$(f \bigwedge g)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \cdot \sum_{\mathcal{P} \in S_{p+q}} \chi(\mathcal{P}) f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p)}) \cdot g(x_{\mathcal{P}(p+1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(p+q)})$$

Bemerkung: Es gilt

$$a^1 \bigwedge (a^2 \wedge a^3 \wedge \dots \wedge a^p) = a^1 \wedge a^2 \wedge \dots \wedge a^p$$

oder allgemeiner

$$(a^1 \wedge \dots \wedge a^p) \bigwedge (a^{p+1} \wedge \dots \wedge a^{p+q}) = a^1 \wedge \dots \wedge a^{p+q}$$

7.0.25 Satz über das Keilprodukt

Es gelten folgende Eigenschaften:

a) Das Keilprodukt ist bilinear als Abbildung

$$\bigwedge : \Lambda^p E^* \times \Lambda^q E^* \rightarrow \Lambda^{p+q} E^*$$

b) Das Keilprodukt ist assoziativ:

$$(f \bigwedge g) \bigwedge h = f \bigwedge (g \bigwedge h)$$

c) Es ist *graduieret-kommutativ* (anders: *superkommutativ*):

$$f \bigwedge g = (-1)^{pq} \cdot g \bigwedge f$$

Eigenschaften (a) und (b) folgt aus der Definition, (c) folgt aus der Schiefsymmetrie von \wedge .

7.0.26 Definition: Volumenform

Wir betrachten den n -dimensionalen Vektorraum E ausgestattet mit dem symmetrischen, nicht ausgearteten $(0,2)$ -Tensor g . Es gilt

$$\dim \Lambda^n E^* = 1$$

Wir definieren die *Volumenform*

$$\text{Vol} \in \Lambda^n E^*$$

als eine n -Form mit der Eigenschaft: Für jede *positiv orientierte* Basis (e_1, \dots, e_n) auf E , mit $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (semi-orthonormale Basis), gilt:

$$\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

Bemerkung: Es gilt:

$$V = \varepsilon_1 Jx_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n Jx_n = a^1 \wedge \dots \wedge a^n$$

(wird weiter unten gezeigt).

Bemerkung zur Orientierung eines Vektorraumes E : Wir betrachten die Menge \mathcal{B} aller Basen auf E . Dann definieren wir die Relation \sim auf zwei Basen $b = (e_1, \dots, e_n)$, $b' = (e'_1, \dots, e'_n) \in \mathcal{B}$ als:

$$b \sim b' \Leftrightarrow \det(\lambda) > 0 \quad \text{wobei } e'_i = \lambda_i^j e_j$$

Die Relation erfüllt die Eigenschaften:

- a) **Symmetrie:** $b \sim b' \Leftrightarrow b' \sim b$ da $\lambda' = (\lambda)^{-1}$
- b) **Reflexivität:** $b \sim b$ da $\det(Id) = 1 > 0$
- c) **Transitivität:** da $\det(\lambda \cdot \lambda'') = \det(\lambda) \cdot \det(\lambda'')$

Die Menge aller Basen lässt sich in zwei Äquivalenzklassen bzgl. ihrer Orientierung aufteilen. Nennen \mathcal{B}_0^+ die Menge aller positiv orientierten, semi-orthonormalen Basen.

7.0.27 Satz über die Volumenform

Die Volumenform Vol ist wohldefiniert, das heißt es existiert tatsächlich solch eine n -Form. Es wäre zu zeigen, dass aus

$$\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1 : (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{B}_0^+$$

auch für eine andere *erlaubte* Basis das gleiche gilt. Dazu verwenden wir folgenden Hilfssatz

Hilfssatz Sei $e'_i = \lambda_i^j e_j$ wobei (e_1, \dots, e_n) , $(e'_1, \dots, e'_n) \in \mathcal{B}_0^+$. Dann gilt: $\det(\lambda) = 1$.

Beweis: Es gilt

$$\varepsilon'_{ii} = g(\lambda_i^j e_j, \lambda_i^k e_k) = \lambda_i^j \lambda_i^k \delta_{jk} \varepsilon_j = \lambda_i^j \lambda_i^j \varepsilon_j \quad , \quad 0 = g(\lambda_i^j e_j, \lambda_m^k e_k) = (\cdot) = \lambda_i^j \lambda_m^j \varepsilon_j$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist äquivalent zur Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon'_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (-1)^s = \det(\lambda)^2 \cdot (-1)^s \rightarrow \det(\lambda) = \pm 1$$

wobei $s = \prod_i \varepsilon_i$ die (basisunabhängige) Signatur von g ist. Da die beiden Basen gleich-orientiert sind, ist $\det(\lambda) > 0$ und somit $\det(\lambda) = 1$.

Wir fahren jetzt fort mit dem eigentlichen Beweis über Volumenformen. Seien a^1, \dots, a^n die Dualformen zur positiv orientierten semi-Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n . Dann setzen wir:

$$\text{Vol} := a^1 \wedge \dots \wedge a^n$$

und machen die Probe:

$$\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = (a^1 \wedge \dots \wedge a^n)(e_1, \dots, e_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Wir betrachten nun den Basiswechsel

$$\text{Vol}(e'_1, \dots, e'_n) = (a^1 \wedge \dots \wedge a^n)(\lambda_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \lambda_n^{i_n} e_{i_n}) = \det \begin{pmatrix} \langle \lambda_1^{i_1} e_{i_1}, a^1 \rangle & \dots & \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix} = \det(\lambda) = 1$$

und sehen dass Vol die Forderungen an eine Volumenform erfüllt.

Allgemeiner gilt folgender Satz

7.0.28 Satz über n-Formen

Eine n -Form hat auf allen positiv orientierten, semi-orthonormalen Basen den gleichen Wert.

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_n \in E$ und $y_1, \dots, y_n \in E$ semi-orthonormale und positiv orientierte Basen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_n) &= f(\lambda_1^{j_1} x_{j_1}, \dots, \lambda_n^{j_n} x_{j_n}) = \lambda_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{j_n} \cdot f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \\ &= \sum_{\mathcal{P}} \lambda_1^{\mathcal{P}(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{\mathcal{P}(n)} \cdot \underbrace{f(x_{\mathcal{P}(1)}, \dots, x_{\mathcal{P}(n)})}_{\chi(\mathcal{P})f(x_1, \dots, x_n)} = f(x_1, \dots, x_n) \cdot \underbrace{\sum_{\mathcal{P}} \lambda_1^{\mathcal{P}(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{\mathcal{P}(n)} \chi(\mathcal{P})}_{\det(\lambda_i^{j_i})=1} = f(x_1, \dots, x_n) \quad \square \end{aligned}$$

7.0.29 Die Volumenform als Maß für Volumen

Es sei x_1, \dots, x_n eine positiv orientierte semi-orthonormalbasis in (V, g) . Für Vektoren v_1, \dots, v_n gilt

$$|V(v_1, \dots, v_n)| = |\det(\underbrace{dx^j v_i}_{g(\varepsilon_j x_j, v_i)})| = \sqrt{|\det(g(v_i, v_j))|}$$

Durch Vergleich mit dem Begriff des durch Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Volumens im \mathbb{R}^n , wird die Bedeutung des Namens von V ersichtlich.

7.0.30 Definition: Hodge-Operator

Sei E ein n -dimensionaler linearer Raum ausgestattet mit g und der Volumenform Vol . Dann definiert man als *Hodge-Operator* oder *Hodge-Stern* den Operator

$$* : \Lambda^p E^* \rightarrow \Lambda^{n-p} E^*$$

der jeder p -Form eine $(n-p)$ Form zuordnet und folgende Eigenschaften erfüllt:

- a) $*$ ist eine lineare Abbildung
- b) Zu Basis $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}_0^+$:

$$*(Jx_{i_1} \wedge \dots \wedge Jx_{i_p}) = \varepsilon_{i_{p+1}} \dots \varepsilon_{i_n} \cdot Jx_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge Jx_{i_n}$$

wobei

$$\chi \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = 1 \quad (6)$$

Somit ist $*$ eindeutig definiert!

Spezialfall: Sind $dx^1, \dots, dx^n \in E^*$ die zu x_1, \dots, x_n dualen, so ist $Jx_i = \varepsilon_i \cdot dx^i$. Daher:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_p} \cdot dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

(keine Summation!) wobei i_1, \dots, i_n wie in (6) seien.

Beispiele:

- i) Fall $p = 0$:

$$*(1) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \cdot Jx_1 \wedge \dots \wedge Jx_n = a^1 \wedge \dots \wedge a^n = V$$

- ii) Fall $p = 1$:

$$*(a^i) = \varepsilon_i (*Ja^i) \stackrel{(5)}{=} \varepsilon_i \cdot \underbrace{\chi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i & 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}}_{(-1)^{i-1}} \cdot a^1 \wedge \dots \wedge a^{i-1} \wedge a^{i+1} \wedge \dots \wedge a^n$$

$$= \varepsilon_i (-1)^{i-1} a^1 \wedge \dots \wedge a^{i-1} \wedge a^{i+1} \wedge \dots \wedge a^n \quad (7)$$

iii) Fall $p = 2$:

$$*(a^1 \wedge a^2) = \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n \cdot a^3 \wedge a^4 \wedge \dots \wedge a^n \in \Lambda^{n-2} E^*$$

iv) Fall $p = n$:

$$*\underbrace{(a^1 \wedge \dots \wedge a^n)}_V = \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n \rightarrow *V = \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n$$

v) Für

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$*a^1 = a^2 \wedge a^3 \quad , \quad *(a^1 \wedge a^2 + a^2 \wedge a^3) = *(a^1 \wedge a^2) + *(a^2 \wedge a^3)$$

7.0.31 Satz über den Hodge-Stern Operator

* ist unabhängig von der Wahl der Basis!

Beweis: Betrachten die Charakteristik von *:

$$*(Jx_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jx_{\mathcal{P}(p)}) = \varepsilon_{\mathcal{P}(p+1)} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{\mathcal{P}(n)} \chi(\mathcal{P}) Jx_{\mathcal{P}(p+1)} \wedge \dots \wedge Jx_{\mathcal{P}(n)}$$

Zu zeigen wäre: Auch für eine beliebige Basis y_1, \dots, y_n gelte:

$$*(Jy_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jy_{\mathcal{P}(p)}) = \varepsilon'_{\mathcal{P}(p+1)} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{\mathcal{P}(n)} \chi(\mathcal{P}) Jy_{\mathcal{P}(p+1)} \cdot \dots \cdot Jy_{\mathcal{P}(n)}$$

Dazu genügt es zu zeigen dass:

a)

$$*(Jy_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jy_{\mathcal{P}(p)})(y_{\mathcal{P}(p+1)}, \dots, y_{\mathcal{P}(n)}) = \chi(\mathcal{P})$$

b) Für Indizes i_{p+1}, \dots, i_n mit

$$\{\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p)\} \cap \{i_{p+1}, \dots, i_n\} \neq \emptyset$$

gilt:

$$*(Jy_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jy_{\mathcal{P}(p)})(y_{i_{p+1}}, \dots, y_{i_n}) = 0$$

Beginnen also:

a)

$$\begin{aligned} (Jy_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jy_{\mathcal{P}(p)})(y_{\mathcal{P}(p+1)}, \dots, y_{\mathcal{P}(n)}) &= \lambda_{\mathcal{P}(1)}^{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mathcal{P}(p)}^{j_p} \cdot \lambda_{\mathcal{P}(p+1)}^{j_{p+1}} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mathcal{P}(n)}^{j_n} \cdot *(Jx_{j_1} \wedge \dots \wedge Jx_{j_p})(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{P}(1)}^{\mathcal{Q}(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mathcal{P}(p)}^{\mathcal{Q}(p)} \cdot \chi(\mathcal{Q}) = \chi(\mathcal{P}) \det(\lambda_i^j) = \chi(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} *(Jy_{\mathcal{P}(1)} \wedge \dots \wedge Jy_{\mathcal{P}(p)})(y_{i_{p+1}}, \dots, y_{i_n}) &= \lambda_{\mathcal{P}(1)}^{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mathcal{P}(p)}^{j_p} \cdot \lambda_{i_{p+1}}^{j_{p+1}} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n}^{j_n} \cdot *(Jx_{j_1} \wedge \dots \wedge Jx_{j_p})(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{P}(1)}^{\mathcal{Q}(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mathcal{P}(p)}^{\mathcal{Q}(p)} \cdot \lambda_{i_{p+1}}^{\mathcal{Q}(p+1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n}^{\mathcal{Q}(n)} \cdot \chi(\mathcal{Q}) \stackrel{*}{=} 0 \end{aligned}$$

(*) : Für nicht disjunkte Mengen $\{\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p)\}$ und $\{i_{p+1}, \dots, i_n\}$ tauchen einige Spalten doppelt auf \rightarrow Determinante ist 0.

7.0.32 Der * Operator als Verallgemeinerung des Kreuzproduktes

Betrachten den n -dimensionalen Vektorraum (E, g) mit der (positiv orientierten) semi-Orthonormalbasis $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ und den dazu Dualen dx^1, \dots, dx^n . Für Vektoren X_1, \dots, X_{n-1} stellt

$$\times_{j=1}^{n-1} X_j := [*dx^i(X_1, \dots, X_{n-1})] \partial_{x^i} \quad (8)$$

eine *Verallgemeinerung* des aus dem \mathbb{R}^3 bekannten *Kreuzproduktes* dar.

Erläuterung: Von einer Verallgemeinerung des Kreuzproduktes fordern wir

$$g \left(\times_{j=1}^{n-1} X_j, f \right) \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} f^1 & X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_{n-1}^1 \\ f^2 & X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f^n & X_1^n & X_2^n & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix} \quad \forall f \in E$$

Da g nicht ausgeartet ist, ist (im Fall der Existenz) $\times_{j=1}^{n-1} X_j$ eindeutig festgelegt. Tatsächlich gilt mit obiger Definition 8

$$g \left(\times_{j=1}^{n-1} X_j, f \right) = (*dx^i)(X_1, \dots, X_{n-1}) f^k \cdot \underbrace{g(\partial_{x^i}, \partial_{x^k})}_{\varepsilon_i \delta_{ik}} = \sum_{i=1}^n (*dx^i)(X_1, \dots, X_{n-1}) \varepsilon_i f^i$$

$$\stackrel{(7)}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f^i (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f^i \det \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^{i-1} & X_2^{i-1} & \dots & X_{n-1}^{i-1} \\ X_1^{i+1} & X_2^{i+1} & \dots & X_{n-1}^{i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^n & X_2^n & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Leipniz nach 1. Spalte}}{=} \det \begin{pmatrix} f^1 & X_1^1 & X_2^1 & \dots & X_{n-1}^1 \\ f^2 & X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f^n & X_1^n & X_2^n & \dots & X_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

8 Äußere Differentiation

Sei M eine n -dimensionale, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und F ein schiefsymmetrisches, kovariantes, glattes Tensorfeld:

$$F(Q) \in \Lambda^p M_Q^*$$

Sei Λ_P die Menge aller solcher Felder F . Somit ist automatisch das Keilprodukt \wedge und der Hodge-Stern Operator $*$ punktweise erklärt. Somit kann man schreiben:

$$\wedge : \Lambda_P \times \Lambda_q \rightarrow \Lambda_{p+q}$$

$$* : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{n-p}$$

8.0.33 Definition: Äußere Differentiation

Man definiert die *äußere Differentiation* $d : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p+1}$ durch: Zu

$$F = \frac{1}{p!} F_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$$

ist die *äußere Ableitung* dF definiert durch

$$dF = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial u^{i_0}} F_{i_1 \dots i_p} \cdot du^{i_0} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$$

Bemerkung: dF ist unabhängig von der Karte!

Beweis: Betrachten andere Karte mit Koordinaten v^1, \dots, v^n . Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^k}$$

und

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^l} dv^l$$

Somit ist:

$$dF = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial u^{i_0}} F \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \right) \cdot du^{i_0} du^{i_1} \dots du^{i_p}$$

$$= \frac{1}{p!} \frac{\partial v^{k_0}}{\partial u^{i_0}} \frac{\partial}{\partial v^{k_0}} F \left(\frac{\partial v^{k_1}}{\partial u^{i_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial v^{k_1}}, \dots, \frac{\partial v^{k_p}}{\partial u^{i_p}} \cdot \frac{\partial}{\partial v^{k_p}} \right) \cdot \left(\frac{\partial u^{i_0}}{\partial v^{l_0}} dv^{l_0} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial u^{i_p}}{\partial v^{l_p}} dv^{l_p} \right)$$

$$= \frac{1}{p!} \frac{\partial v^{k_0}}{\partial u^{i_0}} \frac{\partial}{\partial v^{k_0}} \left\{ F \left(\frac{\partial}{\partial v^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{k_p}} \right) \cdot \frac{\partial v^{k_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial v^{k_p}}{\partial u^{i_p}} \right\} \cdot \left(\frac{\partial u^{i_0}}{\partial v^{l_0}} \dots \frac{\partial u^{i_p}}{\partial v^{l_p}} \right) \cdot (dv^{l_0} \wedge \dots \wedge dv^{l_p})$$

$$= \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial v^{k_0}} F \left(\frac{\partial}{\partial v^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{k_p}} \right) \cdot dv^{k_0} \wedge \dots \wedge dv^{k_p} + \frac{1}{p!} \sum_{r=1}^p \underbrace{\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{l_r}} \cdot \frac{\partial}{\partial v^{k_0}} \frac{\partial v^{k_r}}{\partial u^{i_r}}}_{\Omega} \cdot F \left(\frac{\partial}{\partial v^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{k_p}} \right) dv^{k_0} \wedge \dots \wedge dv^{l_r} \wedge \dots \wedge dv^{k_p}$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial v^{k_0}} \underbrace{\left(\frac{\partial u^{i_r}}{\partial v^{l_r}} \cdot \frac{\partial v^{k_r}}{\partial u^{i_r}} \right)}_{\delta_{l_r, k_r}} - \frac{\partial v^{k_r}}{\partial u^{i_r}} \cdot \frac{\partial^2 u^{i_r}}{\partial v^{k_0} \partial v^{l_r}}$$

Außerdem ist wegen dem Satz von Schwarz und der Schiefsymmetrie von \wedge

$$\frac{\partial^2 u^{i_r}}{\partial v^{k_0} \partial v^{l_r}} dv^{k_0} \wedge \dots \wedge dv^{l_r} \wedge \dots \wedge dv^{k_p} = 0$$

da sich alles paarweise weghebt! Somit ist der Satz bewiesen. \square

Bemerkung: Für skalares Feld F ist

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u^i} du^i$$

Rechenregeln:

- a) $d(F + G) = dF + dG$
- b) $d(F \wedge G) = dF \wedge G + (-1)^p F \wedge dG$
- c) $d(dF) = 0$

Komponenten der äußeren Ableitung:

$$(dF)_{k_0 \dots k_p} = \frac{\partial}{\partial u^{k_0}} F_{k_1 \dots k_p} - \frac{\partial}{\partial u^{k_1}} F_{k_0 k_2 \dots k_p} + \dots + (-1)^p \frac{\partial}{\partial u^{k_p}} F_{k_0 \dots k_{p-1}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (dF)_{k_0 \dots k_p} &= dF(\partial_{k_0}, \dots, \partial_{k_p}) = \frac{1}{p!} \sum_{i_0 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_0}} F_{i_1 \dots i_p} \sum_{\mathcal{Q}^{-1}} \chi(\mathcal{Q}^{-1}) \langle \partial_{k_0}, du^{i_{\mathcal{Q}^{-1}(0)}} \rangle \dots \langle \partial_{k_p}, du^{i_{\mathcal{Q}^{-1}(p)}} \rangle \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{Q}} \chi(\mathcal{Q}) \sum_{i_0 \dots i_p} \frac{\partial F_{i_1 \dots i_p}}{\partial u^{i_p}} \underbrace{\langle \partial_{k_{\mathcal{Q}(0)}}, du^{i_1} \rangle}_{\delta_{k_{\mathcal{Q}(0)}^{i_1}}} \dots \langle \partial_{k_{\mathcal{Q}(p)}}, du^{i_p} \rangle = \frac{1}{p!} \sum_{\mathcal{Q}} \frac{\partial F_{k_{\mathcal{Q}(1)} \dots k_{\mathcal{Q}(p)}}}{\partial u^{k_{\mathcal{Q}(0)}}} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p \sum_{\mathcal{Q}(0)=r} \chi(\mathcal{Q}) \frac{\partial F_{k_{\mathcal{Q}(1)} \dots k_{\mathcal{Q}(p)}}}{\partial u^{k_r}} \end{aligned}$$

Zu r und \mathcal{Q} mit $\mathcal{Q}(0) = r$ existiert genau eine Permutation \mathcal{P} der Zahlen $1, \dots, p$ mit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ \mathcal{Q}(0) & \mathcal{Q}(1) & \dots & \mathcal{Q}(p) \end{pmatrix}}_{\chi=\chi(\mathcal{Q})} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & p \\ 0 & \mathcal{P}(1) & \dots & \mathcal{P}(p) \end{pmatrix}}_{\chi=\chi(\mathcal{P})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & r & r+1 & \dots & p \\ \underbrace{\mathcal{Q}(0)}_r & \underbrace{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(1))}_0 & \dots & \underbrace{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(r))}_{r-1} & \underbrace{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(r+1))}_{r+1} & \dots & \underbrace{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(p))}_p \end{pmatrix}}_{\chi=(-1)^r}$$

Für dieses \mathcal{P} ist dann

$$F_{k_{\mathcal{Q}(1)} \dots k_{\mathcal{Q}(p)}} = \chi(\mathcal{P}) F_{k_{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(1))} \dots k_{\mathcal{Q}(\mathcal{P}(p))}} = \chi(\mathcal{P}) F_{k_0 \dots k_{r-1} k_{r+1} \dots k_p}$$

so dass gilt:

$$(dF)_{k_0 \dots k_p} = \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p \sum_{\mathcal{Q}(0)=r} \chi(\mathcal{Q}) \chi(\mathcal{P}) \frac{\partial F_{k_0 \dots k_{r-1} k_{r+1} \dots k_p}}{\partial u^{k_r}} = \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p p! (-1)^r \frac{\partial F_{k_0 \dots k_{r-1} k_{r+1} \dots k_p}}{\partial u^{k_r}} \quad \square$$

Andere Formulierung des Satzes:

$$dF(\partial_{k_0}, \dots, \partial_{k_p}) = \sum_{r=0}^p (-1)^r \partial_{k_r} F(\partial_{k_0}, \dots, \partial_{k_{r-1}}, \partial_{k_{r+1}}, \dots, \partial_{k_p})$$

8.0.34 Satz über die äußere Ableitung

Allgemeiner gilt:

$$dF(X_0, \dots, X_p) = \sum_{r=0}^p (-1)^r X_r F(X_0, \dots, X_{r-1}, X_{r+1}, \dots, X_p) \\ + \sum_{0 \leq r < s \leq p} (-1)^{r+s} F([X_r, X_s], X_0, \dots, X_{r-1}, X_{r+1}, \dots, X_{s-1}, X_{s+1}, \dots, X_p)$$

Beweis: Die zu beweisende Gleichung stimmt für die Koordinatenvektorfelder und beide Seiten sind \mathcal{F} -Homogen. Somit folgt wegen der daraus folgenden punktweise Linearität die Gültigkeit für beliebige Vektorfelder.

Spezialfälle:

- i) $p = 0 : dF(X) = XF$ (F skalares Feld)
- ii) $p = 1 : dF(X, Y) = XF(Y) - YF(X) - F([X, Y])$
- iii) $p = 2 : dF(X, Y, Z) = XF(Y, Z) - YF(X, Z) + ZF(X, Y) - F([X, Y], Z) + F([X, Z], Y) - F([Y, Z], X)$

8.0.35 Beispiel: Der Feldstärkentensor

Betrachten den Feldstärkentensor

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $e_0 = \partial_0, e_1 = \partial_1, e_2 = \partial_2, e_3 = \partial_3$. Anders ausgedrückt ist:

$$F = E^1 du^0 \otimes du^1 - E^1 du^1 \otimes du^0 \\ + E^2 du^0 \otimes du^2 - E^2 du^2 \otimes du^0 \\ + E^3 du^0 \otimes du^3 - E^3 du^3 \otimes du^0 \\ - B^1 du^2 \otimes du^3 + B^1 du^3 \otimes du^2 \\ + B^2 du^1 \otimes du^3 - B^2 du^3 \otimes du^1 \\ - B^3 du^1 \otimes du^2 + B^3 du^2 \otimes du^1 \\ = E^1 du^0 \wedge du^1 + E^2 du^0 \wedge du^2 + E^3 du^0 \wedge du^3 \\ - B^1 du^2 \wedge du^3 + B^2 du^1 \wedge du^3 - B^3 du^1 \wedge du^2$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} * (du^0 \wedge du^1) &= (-1) * (J\partial_0 \wedge J\partial_1) = (-1)^3 (J\partial_2 \wedge J\partial_3) = (-1)^5 (du^2 \wedge du^3) = -du^2 \wedge du^3 \\ * (du^0 \wedge du^2) &= du^1 \wedge du^3 \\ * (du^0 \wedge du^3) &= -du^1 \wedge du^2 \\ * (du^2 \wedge du^3) &= du^0 \wedge du^1 \\ * (du^1 \wedge du^3) &= -du^0 \wedge du^2 \\ * (du^1 \wedge du^2) &= du^0 \wedge du^3 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} * F &= -E^1 du^2 \wedge du^3 + E^2 du^1 \wedge du^3 - E^3 du^1 \wedge du^2 \\ &\quad - B^1 du^0 \wedge du^1 - B^2 du^0 \wedge du^2 - B^3 du^0 \wedge du^3 \end{aligned}$$

bzw.

$$((\ast F)_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} d \ast F := d(\ast F) &= -\frac{\partial E^1}{\partial u^0} du^0 \wedge du^2 \wedge du^3 - \frac{\partial E^1}{\partial u^1} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \\ &+ \frac{\partial E^2}{\partial u^0} du^0 \wedge du^1 \wedge du^3 + \frac{\partial E^3}{\partial u^2} du^2 \wedge du^1 \wedge du^3 \\ &- \frac{\partial E^3}{\partial u^0} du^0 \wedge du^1 \wedge du^2 - \frac{\partial E^3}{\partial u^3} du^3 \wedge du^1 \wedge du^2 \\ &- \frac{\partial B^1}{\partial u^2} du^2 \wedge du^0 \wedge du^1 - \frac{\partial B^1}{\partial u^3} du^3 \wedge du^0 \wedge du^1 \\ &- \frac{\partial B^2}{\partial u^1} du^1 \wedge du^0 \wedge du^2 - \frac{\partial B^2}{\partial u^3} du^3 \wedge du^0 \wedge du^2 \\ &- \frac{\partial B^3}{\partial u^1} du^1 \wedge du^0 \wedge du^3 - \frac{\partial B^3}{\partial u^2} du^2 \wedge du^0 \wedge du^3 \\ &= \left(-\frac{\partial E^1}{\partial u^1} - \frac{\partial E^2}{\partial u^2} - \frac{\partial E^3}{\partial u^3} \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 + \left(-\frac{\partial E^1}{\partial u^0} - \frac{\partial B^2}{\partial u^3} + \frac{\partial B^3}{\partial u^2} \right) du^0 \wedge du^2 \wedge du^3 \\ &+ \left(\frac{\partial E^2}{\partial u^0} - \frac{\partial B^1}{\partial u^3} + \frac{\partial B^3}{\partial u^1} \right) du^0 \wedge du^1 \wedge du^3 + \left(-\frac{\partial E^3}{\partial u^0} - \frac{\partial B^1}{\partial u^2} + \frac{\partial B^2}{\partial u^1} \right) du^0 \wedge du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

$$d \ast F = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$dF = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}$$

Somit entsprechen die Maxwell Gleichungen im Vakuum genau $dF = 0$, $d \ast F = 0$.

9 Kovariante & Lie Ableitungen von Feldern

9.1 Kovariante Ableitung

9.1.1 Einführung

Wenn M ein euklidischer linearer Raum ist, dann betrachten wir das Vektorfeld Y und das Vektorfeld $D_X Y(P)$, indem wir die Richtungsableitung von Y in Richtung X am Punkt P abfragen:

$$D_X Y(P) := (D_X Y)(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [Y(P + hX(P)) - Y(P)]$$

Dabei wird aus zwei Vektorfeldern X, Y ein neues Vektorfeld $D_X Y$.

Eigenschaften der Operation D

$$D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$D_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda D_X Y + \mu D_X Z$$

$$D_X(fY) = (Xf)Y + fD_X Y$$

$$D_Z(X \cdot Y) = (D_Z X)Y + X D_Z Y$$

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

wobei \cdot das Standardskalarprodukt sei.

Beweis: Betrachten die kanonische Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$ mit

$$X = X^i \partial_i, \quad Y = Y^k \partial_k$$

und bekommen

$$D_X Y = X^i (\partial_i Y^k) \partial_k$$

$$D_X Y - D_Y X = (X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k) \partial_k$$

9.1.2 Definition: Zusammenhang

Eine Operation $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, $\nabla : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ mit den Eigenschaften

- D1

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad f, g \in \mathcal{F}$$

- D2

$$\nabla_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda \nabla_X Y + \mu \nabla_X Z, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- D3

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad f \in \mathcal{F}$$

heißt *Zusammenhang*.

9.1.3 Fundamentalsatz der Riemanschen Geometrie

Auf einer Semi-Riemanschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit dem Metrischen Tensor g , existiert genau ein Zusammenhang ∇ mit

- **D4**

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

- **D5**

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Beweis: Wir fragen uns nach dem $\nabla_X Y$. Wir verwenden die 5 Eigenschaften und bekommen

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \stackrel{*}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z])$$

$$(*) : \nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$$

Aus Symmetrieüberlegungen analog:

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) + g(Z, [Y, X])$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g(X, [Z, Y])$$

Aufaddiert bzw. abgezogen ergibt

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - (Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

Oberer Ausdruck stellt eine implizite Formel für $\nabla_X Y$ dar, und wird *Koszul Formel* (K) genannt. Die rechte Seite von (K) hängt linear und \mathcal{F} -homogen von Z ab. Betrachten das ganze nur an einem Punkt $P \in M$ und nehmen einen beliebigen Vektor $z \in M_P$, den wir zu einem Vektorfeld Z fortsetzen. Es zeigt sich dass $g(\nabla_X Y, Z)(P)$ unabhängig von der Fortsetzung ist und demnach für ein bestimmtes z eindeutig definiert ist. Da $g(\nabla_X Y, Z)$ in P für alle $z \in M_P$ definiert ist, ist auch $\nabla_X Y$ dort eindeutig definiert. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten von $\nabla_X Y$ in P , mit genau so vielen Gleichungen wie Unbekannten. Da g nicht ausgeartet ist, hat dies eine eindeutige Lösung.

Zu zeigen: Die Operation $\nabla_X Y$, die den Vektorfeldern X, Y das durch (K) festgelegte Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, hat die Eigenschaften D1 bis D5.

- **D1** Die rechte Seite von (K) hängt additiv von X ab. Also:

$$\forall z : g(\nabla_{X_1+X_2} Y, Z) = g(\nabla_{X_1} Y, Z) + g(\nabla_{X_2} Y, Z) \rightarrow \nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$

Außerdem hängt die rechte Seite von (K) \mathcal{F} -homogen von X ab:

$$\forall z : g(\nabla_{fX} Y, Z) = fg(\nabla_X Y, Z) \rightarrow \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

Aus beiden Eigenschaften folgt D1.

- **D2** Die rechte Seite von (K) hängt linear von Y ab. Analog zu vorhin ergibt sich daraus D2.
- **D3** Wegen

$$\forall z : g(\nabla_X (fY), Z) = (Xf)g(Y, Z) + fg(\nabla_X Y, Z)$$

folgt somit auch D3.

- **D4** Analog, ergibt sich durch direktes Ausrechnen und Verwendung der Rechenregeln für Vektorfelder:

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X) = (\dots) = Zg(X, Y)$$

und somit D4.

- **D5** Analog:

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = (\dots) = g([X, Y], Z)$$

was eben D5 impliziert.

Dieser Zusammenhang ist der so genannte *Levi Chivita* Zusammenhang. Man definiert:

- $\nabla_X Y$: als die *kovariante Ableitung* von Y bzgl. X
- ∇Y : als die *kovariante Ableitung* von Y , mit:

$$\nabla Y : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \nabla Y(X) := \nabla_X Y$$

Sie kann als ein (1,1)-Tensorfeld angesehen werden: $\mathcal{K} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$:

$$\nabla Y(K, X) := K \nabla_X Y$$

9.1.4 Definition: Christophelsymbole

Man definiert die *Christophelsymbole* Γ_{ik}^j als

$$\Gamma_{ik}^j \partial_j := \nabla_{\partial_i} \partial_k$$

Bemerkungen: Wegen

$$\nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_k} \partial_i = [\partial_i, \partial_k] = 0$$

gilt $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$. Ebenso gilt

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y^k \partial_k = X^i (\nabla_{\partial_i} (Y^k \partial_k)) = X^i [Y^k \underbrace{\nabla_{\partial_i} \partial_k}_{\Gamma_{ik}^j} + (\partial_i Y^k) \partial_k] = X^i (Y^k \Gamma_{ik}^j + \partial_i Y^k) \partial_j$$

$$\rightarrow (\nabla_X Y)^j = X^i Y^k \Gamma_{ik}^j + X^i \partial_i Y^j$$

Man sollte bemerken dass das ganze nur nützlich ist wenn man bereits die Γ_{ik}^j kennt.

9.1.5 Berechnung der Γ_{ik}^j

$$2\Gamma_{ij}^l g_{lk} = 2g(\underbrace{\nabla_{\partial_i} \partial_j}_{\Gamma_{ij}^l \partial_l}, \partial_k) = \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_i, \partial_k) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$$

Wir multiplizieren mit der Inversen g^{kr} und bekommen

$$2\Gamma_{ij}^r = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \cdot g^{kr}$$

Ist ferner g_{ik} diagonal, so folgt

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \partial_i g_{ii}$$

$$k \neq i : \Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2} g^{kk} \partial_k g_{ii}$$

$$i \neq j : \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} g^{jj} \partial_i g_{jj}$$

$$\Gamma_{ik}^j = 0 \text{ sonst}$$

Beispiel: Schwarzschild-Raumzeit: Mit

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} h(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad h(r) := 1 - \frac{2\mu}{r}$$

bekommt man

$$\nabla_{\partial_t} \partial_t = \frac{\mu h(r)}{r^2} \partial_r, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_r = \frac{\mu}{r^2 h(r)} \partial_t, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_\vartheta = 0 = \nabla_{\partial_t} \partial_\varphi$$

$$\nabla_{\partial_r} \partial_r = -\frac{\mu}{r^2 h(r)} \partial_r, \quad \nabla_{\partial_r} \partial_\vartheta = -\frac{1}{r} \partial_\vartheta, \quad \nabla_{\partial_r} \partial_\varphi = \frac{1}{r} \partial_\varphi$$

$$\nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\vartheta = -r h(r) \partial_r, \quad \nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi = \cot \vartheta \cdot \partial_\varphi$$

$$\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = -r h(r) \sin^2 \vartheta \cdot \partial_r - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \partial_\vartheta$$

9.1.6 Geometrische Interpretation der kovarianten Ableitung auf einer Hyperfläche im \mathbb{R}^n

Auf einer $n - 1$ dimensionalen Hyperfläche im \mathbb{R}^n ist $\nabla_X Y$ die Projektion von $D_X Y$ auf den Tangentialraum zu P .

Beweis: Wählen die Basis $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$ im Tangentialraum. Dazu den Normalenvektor \vec{n} mit $\|\vec{n}\| = 1$. Die Vektoren $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, \vec{n}$ bilden eine Basis im \mathbb{R}^n . Sei $X = \partial_i, Y = \partial_j$. Diese festlegung ist aus Linearitätsgründen keine Einschränkung. Seien $\lambda_{ij}^l, \lambda_{ij}$ so dass

$$D_{\partial_i} \partial_j = \lambda_{ij}^l \partial_l + \lambda_{ij} \vec{n}$$

D erfüllt die Axiome (D1) bis (D5). Daher gilt die Koszul Formel:

$$\partial_i (\partial_j \cdot \partial_k) + \partial_j (\partial_i \cdot \partial_k) - \partial_k (\partial_i \cdot \partial_j) = 2D_{\partial_i} \partial_j \cdot \partial_k = 2 (\lambda_{ij}^l \partial_l + \lambda_{ij} \vec{n}) \cdot \partial_k = 2\lambda_{ij}^l \partial_l \cdot \partial_k$$

$$\rightarrow \lambda_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l \rightarrow D_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^l \partial_l + \lambda_{ij} \vec{n} = \nabla_{\partial_i} \partial_j + \lambda_{ij} \vec{n}$$

Anschaungstip: Betrachten wir eine Vektorfunktion Y auf der Fläche M . Selbst wenn sie immer Tangential auf M ist, ist die Änderung (bzw. Richtungsableitung) nicht unbedingt Tangential. $\nabla_X Y$ ist somit die Projektion bzw. die Komponente auf der Tangentialebene.

9.2 Parallelverschiebung von Feldern

9.2.1 Definition: Parallelität von Vektoren längst Kurve

Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X auf M ist *parallel längst Kurve* $\gamma : \Leftrightarrow$

$$\nabla_{\gamma'} X = 0$$

Interpretation: M sei ausgestattet mit der Karte φ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'} X(\gamma(t)) &= \nabla_{(\varphi^i \circ \gamma)' \partial_i} (X^k \partial_k)(\gamma(t)) = (\varphi^i \circ \gamma)' [(\partial_i X^k \partial_k)(\gamma(t)) + (X^k \nabla_{\partial_i} \partial_k)(\gamma(t))] \\ &= (\varphi^i \circ \gamma)' \left[\frac{\partial(X^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(\gamma(t))) \partial_k(\gamma(t)) + X^k \Gamma_{ik}^j \partial_j(\gamma(t)) \right] \\ &= \left[(X^j \circ \gamma)'(t) + (\varphi^i \circ \gamma)'(t) \Gamma_{ik}^j(\gamma(t)) X^k(\gamma(t)) \right] \partial_j(\gamma(t))\end{aligned}$$

das heißt es ist genau dann X parallel längst γ , wenn

$$(X^j \circ \gamma)' = -(\varphi^i \circ \gamma)' \cdot \left(\Gamma_{ik}^j \circ \gamma \right) \cdot (X^k \circ \gamma) \quad (9)$$

Für gegebenes γ stellt obere Gleichung ein homogenes, lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen in $X^k \circ \gamma$ dar. Für gegebene Anfangsbedingungen ist dies eindeutig lösbar.

9.2.2 Folgerung für parallele Vektoren

Sind die Vektorfelder X, Y beide parallel längst der Kurve γ und stimmen an einem Punkt $\gamma(t_0)$ überein: $X_{\gamma(t_0)} = Y_{\gamma(t_0)}$, so stimmen sie auf der gesamten Kurve γ überein.

Beweis: Folgt direkt aus Eindeutigkeit der Lösung der DGL in Definition 9.2.1.

9.2.3 Definition: Paralleltransport

Es sei (M, g) semi-Riemanssch und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M . Definieren die Abbildung

$$\tau_{t,s} : M_{\gamma(t)} \rightarrow M_{\gamma(s)}, \quad t, s \in I$$

wie folgt: Für Vektor $x \in M_{\gamma(t)}$, ist $\tau_{t,s}x$ der eindeutig bestimmte Vektor y der durch Parallelverschiebung von x entlang γ bis zu $\gamma(s)$ erzeugt wird.

$$\tau_{t,s} X(\gamma(t)) = X(\gamma(s))$$

Die Abbildung $\tau_{t,s}$ heißt *Paralleltransport* längst γ .

Erläuterung: Stellt man sich den Paralleltransport auf einer im \mathbb{R}^3 eingebetteten Mannigfaltigkeit vor, so stellt $\tau_{t,s}X$ eine Verschiebung des Tangentenvektors X von $M_{\gamma(t)}$ nach $M_{\gamma(s)}$, so dass seine *Länge* und *Orientierung* im Tangentialraum stets gleich bleiben. Insbesondere ist der Paralleltransport von X **wegabhängig**.

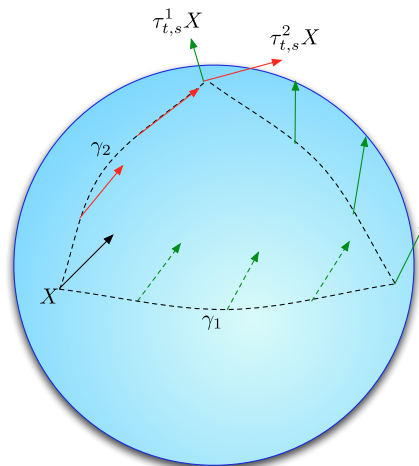


Abbildung 1: Paralleltransport eines Vektors entlang zwei Kurven auf der Kugeloberfläche.

9.2.4 Eigenschaften des Paralleltransports

Es sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve auf der semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , dazu der Paralleltransport $\tau_{t,s}$. Dann gilt:

1. $\tau_{t,s} : M_{\gamma(t)} \rightarrow M_{\gamma(s)}$ ist linear.

Beweis: Folgt aus Homogenität des DGL-Systems 9.

2. $\tau_{t,s}$ erhält die Metrik, das heißt für $X, Y \in M_{\gamma(t)}$ ist

$$g(\tau_{t,s}X, \tau_{t,s}Y) = g(X, Y)$$

(Winkel und Längenerhaltend)

Beweis:

$$\frac{d}{ds}g(\tau_{t,s}X, \tau_{t,s}Y) = \frac{d}{ds}g(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) = \gamma'(s)g(X, Y) = g(\underbrace{\nabla_{\gamma'(s)}X}_{0}, Y) + g(X, \underbrace{\nabla_{\gamma'(s)}Y}_{0}) = 0$$

3. $\tau_{t,s} : M_{\gamma(t)} \rightarrow M_{\gamma(s)}$ ist bijektiv.

Beweis: Da Dimensionen von $M_{\gamma(t)}$ und $M_{\gamma(s)}$ gleich sind, genügt es zu zeigen dass $\text{kernel } \tau_{t,s} = \{0\}$ ist (Injektivität). Tatsächlich folgt aus $\tau_{s,t}X = 0$

$$0 = g(\tau_{t,s}X, \tau_{t,s}Y) = g(X, Y) \quad \forall Y$$

das heißt $X = 0$.

4. Es ist $\tau_{t,s}^{-1} = \tau_{s,t}$.

Beweis: Da $\tau_{t,s}$ bijektiv ist, existiert die inverse Abbildung $\tau_{t,s}^{-1}$. Für

$$Z = \tau_{t,s}Y$$

ist Z genau der Vektor $Z = X(\gamma(s)) \in M_{\gamma(s)}$, der die DGL 9 mit dem Anfangswert $X(\gamma(t)) = Y$ löst. Demnach löst X auch die DGL mit dem Anfangswert $X(\gamma(s)) = Z$, das heißt Y ist der Paralleltransport von Z .

9.2.5 Satz über kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Es sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve auf M und $t \in I$. Dann gilt für Vektorfeld Y :

$$\nabla_{\gamma'(t)}Y_{\gamma(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\tau_{t+h,t}Y_{\gamma(t+h)} - Y_{\gamma(t)}]$$

Beweis: Zum einen gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t)}Y_{\gamma(t)} &= \nabla_{(\varphi^i \circ \gamma)'(t)\partial_i} Y_{\gamma(t)}^k \partial_k = \underbrace{(\varphi^i \circ \gamma)'(t) \frac{\partial(Y^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(\gamma(t)))}_{(Y^k \circ \gamma)'} \partial_k + (\varphi^i \circ \gamma)'(t) Y_{\gamma(t)}^k \Gamma_{ik}^j(\gamma(t)) \partial_j \\ &= \left[(Y^j \circ \gamma)'(t) + (\varphi^i \circ \gamma)'(t) Y_{\gamma(t)}^k \Gamma_{ik}^j(\gamma(t)) \right] \partial_j \end{aligned}$$

Betrachten wir zum anderen (für festes t und Y) die Abbildung

$$v : I \rightarrow TM, \quad v(s) := \tau_{s,t}Y(\gamma(s))$$

Dann folgt durch Ableitung von

$$Y(\gamma(s)) = \tau_{t,s}v(s), \quad Y^k(\gamma(s)) = (\tau_{t,s})_i^k v^i(s)$$

nach $\frac{d}{ds}$:

$$\begin{aligned} (Y^k \circ \gamma)'(s) &= \underbrace{v^i(s) \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{t,s})_i^k}_{-\Gamma_{lr}^k(\varphi^l \circ \gamma)'(s) (\tau_{t,s})_i^r v^i} + (\tau_{t,s})_i^k (v^i)'(s) \\ &\stackrel{s=t}{\Rightarrow} (Y^k \circ \gamma)'(t) = -\Gamma_{lr}^k(\gamma(t)) (\varphi^l \circ \gamma)'(s) (\tau_{t,s})_i^r v^i(s) + \underbrace{(\tau_{t,s})_i^k (v^i)'(s)}_{(v^k)'(t)} \\ &\Rightarrow (v^j)'(t) = (Y^j \circ \gamma)'(t) + \Gamma_{lr}^j(\gamma(t)) (\varphi^l \circ \gamma)'(s) (\tau_{t,s})_i^r v^i(s) \end{aligned}$$

□

9.3 Lie-Ableitung

9.3.1 Definition: Lie Ableitung für skalare Felder

Es sei $f \in \mathcal{F}(M)$ ein skalares Feld und $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M . Dann definiert man

$$\mathcal{L}_X f := Xf$$

und nennt $\mathcal{L}_X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ Lie-Ableitung entlang X .

9.3.2 Definition: Lie Ableitung für Vektorfelder

Es seien X, Y Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M , zu definieren sei nun $\mathcal{L}_X Y$. Man fordert von $\mathcal{L}_X : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ die Leibnitz-Regel

$$\underbrace{\mathcal{L}_X(Yf)}_{XYf} \stackrel{!}{=} (\mathcal{L}_X Y)f + \underbrace{Y(\mathcal{L}_X f)}_{YXf}, \quad f \in \mathcal{F}$$

woraus sich unabdingbar die Definition

$$\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$$

ergibt.

9.3.3 Definition: Lie-Ableitung für Kovektorfelder

Es sei X ein Vektorfeld auf M und A ein Kovektorfeld auf M . Analog zu vorhin fordert man

$$\underbrace{\mathcal{L}_X(AY)}_{X(AY)} \stackrel{!}{=} A(\underbrace{\mathcal{L}_X Y}_{[X, Y]}) + (\mathcal{L}_X A)Y, \quad Y \in \mathcal{X}$$

so dass sich die Definition $\mathcal{L}_X : \Lambda^1 M \rightarrow \Lambda^1 M$ charakterisieren lässt durch

$$(\mathcal{L}_X A)Y := X(AY) - A[X, Y], \quad Y \in \mathcal{X}$$

Behauptung: Die definierte Abbildung $\mathcal{L}_X A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ ist tatsächlich ein Kovektorfeld, das heißt $[(\mathcal{L}_X A)Y](a)$ ist nur von X_a abhängig.

Beweis: Zu zeigen wäre die \mathcal{F} -homogenität von $\mathcal{L}_X A$ (vgl. Satz 5.1.4). Tatsächlich ist für $f \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{X}$:

$$(\mathcal{L}_X A)(fY) = \underbrace{X[A(fY)]}_{X[fAY]} - A \underbrace{[X, fY]}_{f[X, Y] + (Xf)Y} = f \cdot [XAY - A[X, Y]] + \underbrace{(Xf)AY}_{(Xf)AY} - \underbrace{(Xf)AY}_{(Xf)AY} = f \cdot (\mathcal{L}_X A)Y$$

9.3.4 Definition: Lie Ableitung für allgemeines Tensorfeld

Es sei S ein (p, q) -Tensorfeld auf der Mannigfaltigkeit M . Analog zu vorhin, soll die Leibnitz-Regel

$$\mathcal{L}_X [S(A^1, \dots, A^p, X_1, \dots, X_q)] \stackrel{!}{=} (\mathcal{L}_X S)(A^1, \dots, X_q) + S(\mathcal{L}_X A^1, A^2, \dots, X_q) + \dots + S(A^1, \dots, X_{q-1}, \mathcal{L}_X X_q)$$

erzwungen werden. Man erhält also die Definition für $\mathcal{L}_X : TM_q^p \rightarrow TM_q^p$:

$$(\mathcal{L}_X S)(A^1, \dots, X_q) := \mathcal{L}_X [S(A^1, \dots, X_q)] - \sum_{i=1}^p S(\dots, \underbrace{\mathcal{L}_X A^i}_{\uparrow i}, \dots, X_q) - \sum_{i=1}^q S(\dots, \underbrace{\mathcal{L}_X X_i}_{\uparrow (p+i)}, \dots)$$

Analog zu vorhin zeigt sich dass $\mathcal{L}_X S$ tatsächlich ein (p, q) - Tensorfeld ist.

9.3.5 Definition: Fluss

Der Fluss μ^X des Vektorfeldes X auf M ist die Schar von Abbildungen $\mu_t^X : M \rightarrow M$, festgelegt durch die Anfangswert-Probleme

$$\mu_0^X(a) \stackrel{!}{=} a, \quad \frac{d}{dt} \underbrace{\mu_t^X(a)}_{\in T_{\mu_t^X(a)} M} = X_{\mu_t(a)}$$

Offensichtlich gilt

$$\mu_t^X \circ \mu_s^X = \mu_{t+s}^X$$

9.3.6 Interpretation der Lie-Ableitung

Es sei $p \in M$ und μ^X der Fluss zum Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit M . Dann gilt:

$$\underbrace{X_p f}_{(\mathcal{L}_X f)(p)} = \left. \frac{d}{dt} f(\mu_t^X(p)) \right|_{t=0}$$

Analoge Beziehungen gelten auch für die Lie-Ableitungen höherer Tensoren. Man stelle sich nun ein Vektorfeld (bzw. den entsprechenden Fluss) dar, wie etwa eine Flusströmung. Der Fluss $\mu_t^X(p)$ von X beschreibt die Kurve die ein *Testteilchen* durchläuft, das am Punkt p startet und von der Strömung getrieben wird. Existiert nun auf der Mannigfaltigkeit ein 2. Feld (z.B. skalares Feld wie Temperaturverteilung), so beschreibt $\mathcal{L}_X f$ die zeitliche Änderung des vom Testteilchen empfundenen Feldes.

Bemerke dass die Definition der Lie-Ableitung, im Gegensatz zur kovarianten Ableitung, keine Metrik voraussetzt.

9.3.7 Definition: Killing Vektor

Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ heißt *killing*, falls gilt

$$\mathcal{L}_X g \equiv 0$$

Geometrisch: Alle μ_t^X sind Isometrien auf M .

9.3.8 Lemma: Charakterisierung von Killing-Vektoren

Ein Vektorfeld X auf der semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann killing, falls gilt

$$X(g_{ij}) = g([X, \partial_i], \partial_j) + g(\partial_i, [X, \partial_j]) \quad \forall i, j$$

Speziell: Das Koordinatenvektorfeld ∂_k ist genau dann killing, falls

$$\partial_k g_{ij} = 0$$

das heißt, alle Metrik-Komponenten sind unabhängig von der k -ten Koordinate.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 X \text{ killing} &\Leftrightarrow \mathcal{L}_X g = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathcal{X} \\
 &\Leftrightarrow (\mathcal{L}_X g)(\partial_i, \partial_j) = 0 \quad \forall i, j \\
 &\Leftrightarrow \mathcal{L}_X(g_{ij}) = g([X, \partial_i], \partial_j) + g(\partial_i, [X, \partial_j])
 \end{aligned}$$

□

Beispiel: Es sei g die Schwarzschild-Metrik auf M . Dann sind ∂_t und ∂_φ killing.

9.3.9 Lemma: Weitere Charakterisierung von Killing-Vektoren

Es sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist das Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ genau dann killing, falls gilt

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y) \quad \forall Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= \underbrace{Xg(Y, Z)}_{g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)} - g(\underbrace{[X, Y]}_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}, Z) - g(Y, \underbrace{[X, Z]}_{\nabla_X Z - \nabla_Z X}) \\
 &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)
 \end{aligned}$$

□

9.3.10 Lemma über Killing-Vektoren und Geodäten

Ist X killing und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Geodäte, dann gilt

$$g(X_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)) = \text{const}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} g(X_{\gamma(t)}, \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\dot{\gamma}(\gamma(t))}) = \dot{\gamma}(t) g(X, \dot{\gamma}) = \underbrace{g(\nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma})}_0 + g(X_{\gamma}, \underbrace{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}}_0) = 0$$

0 nach (9.3.9)

0 da Geodäte

□

10 Krümmung

Im \mathbb{R}^n gilt allgemein $D_Y D_Z X = D_Z D_Y X$ (Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz). Wir sagen auch: *Der \mathbb{R}^n ist nicht gekrümmt.* Auf Mannigfaltigkeiten gilt diese Gleichung allerdings im allgemeinen nicht! Man führt angesichts dieser Tatsache eine Charakterisierung der *Krümmung* ein.

10.0.11 Definition: Krümmungsoperator

Man definiert den *Krümmungsoperator* auf einer Semi-Riemanschen Mannigfaltigkeit M als eine, von zwei Vektorfeldern $X, Y \in \mathcal{X}$ geprägte, Abbildung $R(X, Y) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$:

$$R(Y, Z)X := \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X$$

Es zeigt sich: R hängt trilinear und \mathcal{F} -homogen von X, Y, Z ab.

10.0.12 Definition: Riemansche Krümmungstensor

Der *Riemansche Krümmungstensor* R ist das (1,3) - Tensorfeld, das dem Punkt P und den Tangentenvektoren $x, y, z \in M_P$ den Tangentenvektor $R(Y, Z)X(P)$, mit den Fortsetzungen $X(P) = x, Y(P) = y, Z(P) = z, X, Y, Z \in \mathcal{X}$, zuordnet.

Bemerkung: Es wurde gezeigt dass der Raum E_3^1 isomorph zum Raum aller multilinearer Abbildungen $A : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ist.

10.0.13 Satz über die Komponenten des Riemanschen Krümmungstensors:

Es gilt:

$$R_{ijk}^s = \partial_j \Gamma_{ki}^s - \partial_k \Gamma_{ji}^s + \Gamma_{jr}^s \Gamma_{ki}^r - \Gamma_{kr}^s \Gamma_{ji}^r$$

mit $R_{ijk}^s \partial_s = R(\partial_j, \partial_k) \partial_i$.

Beweis:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^s \partial_s &= R(\partial_j, \partial_k) \partial_i = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \underbrace{\nabla_{[\partial_j, \partial_k]} \partial_i}_0 \\ &= \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ki}^s \partial_s) - \nabla_{\partial_k} (\Gamma_{ji}^s \partial_s) = (\partial_j \Gamma_{ki}^s) \partial_s - (\partial_k \Gamma_{ji}^s) \partial_s + \Gamma_{ki}^s \nabla_{\partial_j} \partial_s - \Gamma_{ji}^s \nabla_{\partial_k} \partial_s \\ &= (\partial_j \Gamma_{ki}^s) \partial_s - (\partial_k \Gamma_{ji}^s) \partial_s + \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^s \partial_s - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^s \partial_s = [(\partial_j \Gamma_{ki}^s) - (\partial_k \Gamma_{ji}^s) + \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^s - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^s] \partial_s \quad \square \end{aligned}$$

10.0.14 Satz über den Riemanschen Krümmungstensor

Auf einer Semi-Riemanschen Mannigfaltigkeit mit dem Riemanschen Krümmungstensor gilt:

- $R(Y, Z)X = -R(Z, Y)X \leftrightarrow R_{ijk}^s = -R_{ikj}^s$
- Bianchi Identität: $R(Y, Z)X + R(Z, X)Y + R(X, Y)Z = 0 \leftrightarrow R_{ijk}^s + R_{jki}^s + R_{kij}^s = 0$

Beweis:

- Klar.

b) Verwenden die Eigenschaften von ∇ und schreiben

$$\begin{aligned}
& R(Y, Z)X + R(Z, X)Y + R(X, Y)Z \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Y, Z]} - \nabla_{[Z, X]} - \nabla_{[X, Y]} \\
&= \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z \\
& [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0
\end{aligned}$$

10.0.15 Definition: Kovarianter Krümmungsoperator

Man definiert den *Kovarianten Krümmungsoperator* \mathcal{R} , als ein (0,4)-Tensorfeld:

$$\mathcal{R}(V, X, Y, Z) := g(V, R(Y, Z)X)$$

10.0.16 Satz über den kovarianten Krümmungsoperator

Es gilt:

$$\mathcal{R}_{rijk} = g_{rs} R_{ijk}^s$$

Beweis:

$$\mathcal{R}_{rijk} = \mathcal{R}(\partial_r, \partial_i, \partial_j, \partial_k) = g(\partial_r, R(\partial_j, \partial_k)\partial_i) = \underbrace{g(\partial_r, \partial_s)}_{g_{rs}} R_{ijk}^s$$

10.0.17 Eigenschaften des kovarianten Krümmungsoperators

Es gelten folgende Eigenschaften:

- a) $\mathcal{R}(V, X, Y, Z) = -\mathcal{R}(V, X, Z, Y)$ bzw. $\mathcal{R}_{rijk} = -\mathcal{R}_{rikj}$
- b) $\mathcal{R}(V, X, Y, Z) + \mathcal{R}(V, Y, Z, X) + \mathcal{R}(V, Z, X, Y) = 0$ bzw. $\mathcal{R}_{rijk} + \mathcal{R}_{rjki} + \mathcal{R}_{rki j} = 0$
- c) $\mathcal{R}(V, X, Y, Z) = -\mathcal{R}(X, V, Y, Z)$ bzw. $\mathcal{R}_{rijk} = -\mathcal{R}_{irjk}$
- d) $\mathcal{R}(V, X, Y, Z) = \mathcal{R}(Y, Z, V, X)$ bzw. $\mathcal{R}_{rijk} = \mathcal{R}_{jkri}$

Beweis: Die erste und zweite Eigenschaft folgen unmittelbar aus der Definition. Zu drittens: Es genügt zu zeigen dass

$$\mathcal{R}(X, X, Y, Z) = 0$$

denn dann ist

$$\underbrace{\mathcal{R}(V + X, V + X, Y, Z)}_0 = \underbrace{\mathcal{R}(X, X, Y, Z)}_0 + \underbrace{\mathcal{R}(V, V, Y, Z)}_0 + \mathcal{R}(X, V, Y, Z) + \mathcal{R}(V, X, Y, Z) = 0 \rightarrow \mathcal{R}(X, V, Y, Z) = -\mathcal{R}(V, X, Y, Z)$$

Wir beginnen also mit der Definition von \mathcal{R} und schreiben

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, X, Y, Z) &= g(X, \mathcal{R}(Y, Z)X) = \underbrace{g(X, \nabla_Y \nabla_Z X)}_{Yg(X, \nabla_Z X) - g(\nabla_Y X, \nabla_Z X)} - \underbrace{g(X, \nabla_Z \nabla_Y X)}_{Zg(X, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, \nabla_Y X)} - g(X, \nabla_{[Y, Z]} X) \\
&= Y \underbrace{g(X, \nabla_Z X)}_{\frac{1}{2}Zg(X, X)} - Z \underbrace{g(X, \nabla_Y X)}_{\frac{1}{2}Yg(X, X)} - \underbrace{g(X, \nabla_{[Y, Z]} X)}_{\frac{1}{2}[Y, Z]g(X, X)} = \frac{1}{2} \underbrace{(YZ - ZY - [Y, Z])}_{0} g(X, X) = 0
\end{aligned}$$

Zu 4-tens verwenden wir die anderen 3 Eigenschaften und schreiben

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, V) + \mathcal{R}(X, Z, V, Y) \stackrel{2}{=} -\mathcal{R}(X, V, Y, Z) \stackrel{3}{=} \mathcal{R}(V, X, Y, Z) \stackrel{1}{=} -\mathcal{R}(V, X, Z, Y) \stackrel{2}{=} \mathcal{R}(V, Z, Y, X) + \mathcal{R}(V, Y, X, Z)$$

$$2\mathcal{R}(V, X, Y, Z) = \mathcal{R}(V, Z, Y, X) + \mathcal{R}(V, Y, X, Z) + \mathcal{R}(X, Y, Z, V) + \mathcal{R}(X, Z, V, Y)$$

$$\text{Analog : } 2\mathcal{R}(Y, Z, V, X) = \underbrace{\mathcal{R}(Y, X, V, Z)}_{\mathcal{R}(X, Y, Z, V)} + \underbrace{\mathcal{R}(Y, V, Z, X)}_{\mathcal{R}(V, Y, X, Z)} + \underbrace{\mathcal{R}(Z, V, X, Y)}_{\mathcal{R}(V, Z, Y, X)} + \underbrace{\mathcal{R}(Z, X, Y, V)}_{\mathcal{R}(X, Z, V, Y)}$$

$$\rightarrow \mathcal{R}(V, X, Y, Z) = \mathcal{R}(Y, Z, V, X) \quad \square$$

10.0.18 Definition: Ricci-Tensor

Man definiert den (0,2) *Ricci Tensor* als:

$$\text{Ric}_{ik} := R_{ijk}^j$$

Dabei gilt: Ric ist Symmetrisch.

Beweis:

$$\text{Ric}_{ik} = \mathcal{R}_{ijk}^j = g^{jl} R_{lijk} = g^{jl} R_{jkli} = \mathcal{R}_{kli}^l = \text{Ric}_{ki} \quad \square$$

10.0.19 Definition: Gemischter Ricci-Tensor

Man definiert den *gemischten Ricci-Tensor* als:

$$\text{Ric}_i^j := g^{jk} \cdot \text{Ric}_{ik}$$

10.0.20 Definition: Krümmungsskalar

Der *Krümmungsskalar* S ist definiert als die Kontraktion des gemischten Ricci-Tensor Ric:

$$S := \text{Ric}_i^i = g^{ik} \text{Ric}_{ik} = g^{ik} \mathcal{R}_{ijk}^j$$

10.0.21 Definition: Einstein Tensor

Der *Einstein-Tensor* G ist definiert als (0,2) Tensor durch

$$G := \text{Ric} - \frac{1}{2} Sg$$

mit dem Krümmungsskalar S , dem Ricci-Tensor Ric und dem Fundamentaltensor g .

11 Einsteinsche Feldgleichung

Für dem *Energie-Impuls Tensor* T gilt die Einsteinsche Feldgleichung

$$G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 8\pi T$$

Im Vakuum ist:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 0$$

11.0.22 Satz über die Feldgleichung

Es gilt:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 0 \Leftrightarrow \text{Ric} = 0$$

Beweis: " \Leftarrow " ist klar.

Richtung " \Rightarrow ": Beginnen mit

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 0$$

und schreiben

$$0 = \text{Ric}_{ik} g^{kl} - \frac{1}{2}Sg_{ik}g^{kl} = \text{Ric}_i^l - \frac{1}{2}Sg_{ik}g^{kl} = \text{Ric}_i^l - \frac{1}{2}S\delta_i^l$$

$$\rightarrow \text{Ric}_i^l = \begin{cases} 0 & : i \neq l \\ \frac{1}{2}S & : i = l \end{cases} \rightarrow 0 = S - S = \text{Ric}_i^i - S = \frac{1}{2}S \cdot 4 - S = S \rightarrow \text{Ric} = 0 \quad \square$$

11.0.23 Begründung der Schwarzschild-Metrik

Wir betrachten die Koordinaten t, r, ϑ, φ wobei t die *Schwarzschild-Zeit*, r der Schwarzschild-Radius (radiale Koordinate) und ϑ, φ die beiden Winkel-Koordinaten gemäß der Kugelkoordinaten sind. Wir fordern dass $-g$ auf der Kugelschale euklidisch ist. Aus Symmetriegründen muss gelten:

$$g(\partial_t, -\partial_\vartheta) = g(\partial_t, \partial_\vartheta) \rightarrow g(\partial_t, \partial_\vartheta) = 0$$

$$\text{Analog: } g(\partial_t, \partial_\varphi) = g(\partial_r, \partial_\vartheta) = g(\partial_r, \partial_\varphi) = 0$$

Also:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} a(r) & c(r) & 0 & 0 \\ c(r) & b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Wir wollen jetzt $c(r)$ durch Zeitorientierung eliminieren:

$$\tilde{t} := t + \alpha(r)$$

Wir führen die neuen Koordinaten $\tilde{t}, r, \vartheta, \varphi$ ein, dazu

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vartheta}}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

und schreiben

$$\tilde{\partial}_r f = \frac{\partial}{\partial r} (f \circ \varphi^{-1}) (\tilde{t}, r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial}{\partial r} (f \circ \varphi^{-1}) (t, r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial}{\partial r} (f \circ \varphi^{-1}) (\tilde{t} - \alpha(r), r, \vartheta, \varphi) = \partial_r f - \alpha' \partial_t f$$

$$\rightarrow \tilde{\partial}_r = \partial_r - \alpha' \partial_t$$

Ziel:

$$0 = g(\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_r) = g(\partial_t, \partial_r - \alpha' \partial_t) = g(\partial_t, \partial_r) - \alpha' g(\partial_t, \partial_t) = c - \alpha' a$$

Also setzen wir:

$$\alpha = \int \frac{c}{a} dr$$

Somit ist jetzt unser Stand der Kenntniss:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} A(r) & c(r) & 0 & 0 \\ c(r) & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

wobei wir A und B positiv setzen (somit ist g indefinit). Dazu erhält erhält man die kovarianten Ableitungen

$$\nabla_{\partial_t} \partial_t = \frac{A'}{2B} \partial_t, \quad \nabla_{\partial_r} \partial_r = \frac{B'}{2B} \partial_r, \quad \nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\vartheta = -\frac{r}{B} \partial_r, \quad \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = -\frac{r \sin^2 \vartheta}{B} \partial_r - \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \partial_\vartheta$$

$$\nabla_{\partial_t} \partial_r = \frac{A'}{2A} \partial_t, \quad \nabla_{\partial_t} \partial_\vartheta = 0 = \nabla_{\partial_t} \partial_\varphi, \quad \nabla_{\partial_r} \partial_\vartheta = \frac{1}{r} \partial_\vartheta, \quad \nabla_{\partial_r} \partial_\varphi = \frac{1}{r} \partial_\varphi, \quad \nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi = \cot \vartheta \cdot \partial_\varphi$$

Durch die Definition

$$R(\partial_j, \partial_k) \partial_i = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{[\partial_j, \partial_k]} \partial_i$$

erhält man für den Riemanschen Krümmungstensor analog

$$R(\partial_t, \partial_r) \partial_t = \frac{A'^2 B + AA' B' - 2AA''}{4AB^2} \cdot \partial_r$$

$$R(\partial_t, \partial_r) \partial_r = \frac{AA' B' - 2AA'' B + A'^2 B}{4A^2 B} \cdot \partial_t$$

$$R(\partial_t, \partial_r) \partial_\vartheta = 0 = R(\partial_t, \partial_r) \partial_\varphi$$

die insgesamt nur 24 nicht-verschwindende Komponenten:

$$R_{101}^0 = \frac{1}{2A} \left(\frac{A' B'}{2B} - A'' + \frac{A' A'}{2A} \right) = -R_{110}^0$$

$$R_{001}^1 = \frac{1}{2B} \left(\frac{A' A'}{2A} - A'' + \frac{A' B'}{2B} \right) = -R_{010}^1$$

$$R_{202}^0 = -\frac{A' r}{2AB} = -R_{220}^0, \quad R_{002}^2 = -\frac{A'}{2Br} = -R_{020}^2$$

$$R_{303}^0 = -\frac{A' r \sin^2 \vartheta}{2AB} = -R_{330}^0, \quad R_{003}^3 = -\frac{A'}{2Br} = -R_{030}^3$$

$$R_{212}^1 = -\frac{B' r}{2B^2} = -R_{221}^1, \quad R_{112}^2 = -\frac{B'}{2Br} = -R_{121}^2$$

$$R_{313}^1 = \frac{B' r \sin^2 \vartheta}{2B^2} = -R_{331}^1, \quad R_{113}^3 = -\frac{B'}{2Br} = -R_{131}^3$$

$$R_{323}^2 = \left(1 - \frac{1}{B} \right) \sin^2 \vartheta = -R_{332}^2, \quad R_{223}^3 = \frac{1}{B} - 1 = -R_{232}^3$$

Für g ergibt sich der Ric-Tensor als

$$\text{Ric}_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'A'}{4AB} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{Br}$$

$$\text{Ric}_{11} = \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'A'}{4A^2} + \frac{B'}{Br}$$

$$\text{Ric}_{22} = -\frac{A'r}{2AB} + \frac{B'r}{2B^2} + 1 - \frac{1}{B}$$

$$\text{Ric}_{33} = \sin^2 \vartheta \cdot \text{Ric}_{22}$$

Aus den Einsteinschen Feldgleichungen weis man dass im Vakuum $T = 0$ und somit auch $\text{Ric} = 0$ ist. Insbesondere sind auch

$$\text{Ric}_{00} = \text{Ric}_{11} = \text{Ric}_{22} = 0$$

und man erhält durch die oberen Beziehungen die Differentialgleichungen

$$0 = \frac{\text{Ric}_{00}}{A} + \frac{\text{Ric}_{11}}{B} = \frac{1}{rB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \rightarrow \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = (\ln(AB))' = 0 \rightarrow AB = \text{const}$$

Aus physikalischen Gründen muss die Wirkung der Masse im Unendlichen verschwinden, d.h die Metrik muss in die Lorenz-Metrik übergehen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) \Rightarrow 1 = \lim_{r \rightarrow \infty} A(r)B(r) = A(r) \cdot B(r)$$

und man erhält so

$$A \cdot B = 1$$

Ferner gilt wegen $\text{Ric} = 0$

$$0 = \text{Ric}_{22} = 1 - A - A'r \rightarrow 1 = A + A'r = (rA)' \rightarrow rA = r - 2\mu \rightarrow A = 1 - \frac{2\mu}{r}$$

woraus man schließlich die bekannte Schwarzschild-Metrik erhält

$$(g_{ik}) = \text{diag} \left(1 - \frac{2\mu}{r}, \frac{-1}{1 - \frac{2\mu}{r}}, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta \right)$$

12 Zeit-Geodäten

12.0.24 Definition: Weltlinie

Eine *Weltlinie* W ist die Bildmenge eines Beobachters $\gamma : U \rightarrow M$

$$W := \{\gamma(t) \in M : t \in U\}$$

Bemerkung: Es ist nicht unbedingt möglich einer Weltlinie eindeutig einen Beobachter zuzuordnen.

12.0.25 Definition: Umparametrisierter Beobachter

Wir nennen $\beta : U \rightarrow M$ wobei $\beta'(t)$ zukunftsreisend sei, unter der Bedingung $g(\beta', \beta') > 0$, einen *umparametrisierten Beobachter*. Dabei nennen wir

$$t(s) - t_0 = t - t_0 = \int_{s_0}^s \sqrt{g(\beta'(\sigma), \beta'(\sigma))} d\sigma$$

Beispiele:

a) Angenommen $\beta = \gamma$, so ergibt sich

$$t = t_0 + \int_{s_0}^s d\sigma = s - s_0 + t_0$$

b) Falls $\forall s : t = s - s_0 + t_0$ ist, so ist β der Beobachter.

Bemerkung: Sei β fest, und $s(s_1), s : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b] = U$ mit $s' > 0$ (s monoton wachsend). Dann ist mit $\beta : [a, b] \rightarrow M$ auch $(\beta \circ s) : [a_1, b_1] \rightarrow M$ und

$$t(s) - t_0 = t(s_1) - t_0^1$$

Beweis:

$$\int_{s_1^0}^{s_1^1} \sqrt{g\left(\frac{d}{d\sigma}\beta(s(\sigma)), \frac{d}{d\sigma}\beta(s(\sigma))\right)} d\sigma = \int_{s_1^0}^{s_1^1} s'(\sigma) \sqrt{g\left(\frac{d}{ds}\beta(s), \frac{d}{ds}\beta(s)\right)} d\sigma = \int_{s(s_1^0)=s_0}^{s(s_1^1)=s} \sqrt{g\left(\frac{d}{d\sigma}\beta(\sigma), \frac{d}{d\sigma}\beta(\sigma)\right)} d\sigma$$

12.0.26 Satz über umparametrisierte Beobachter

Sei $\beta : U \rightarrow M$ ein umparametrisierter Beobachter. Dann gilt:

- $\exists s(s_1)$ so dass $\beta(s(s_1))$ ein Beobachter ist.
- Die Zeit die der Beobachter braucht, um von $\beta(s_0)$ bis $\beta(s)$ zu kommen ist

$$t(s) - t_0 = t - t_0 = \int_{s_0}^s \sqrt{g(\beta'(\sigma), \beta'(\sigma))} d\sigma$$

Beweis (a): Wir setzen o.B.d.A $s_0 = a$, $t_0 = 0$ und schreiben

$$t'(s) = \sqrt{g(\beta', \beta')} > 0 \text{ streng monoton} \rightarrow \text{bijektiv}$$

$$\rightarrow \exists t^{-1} =: s_1 : s_1(t(s)) = s$$

$$\text{Also : } t = \int_{s_0(t_0)=s_1(t_0)}^{s(t)=s_1(t)} \sqrt{g(\beta'(\sigma), \beta'(\sigma))} d\sigma \stackrel{*}{=} \int_{t_0}^t \sqrt{g\left(\frac{d}{ds_1}\beta(s_1(\sigma)), \frac{d}{ds_1}\beta(s_1(\sigma))\right)} \cdot s_1' d\sigma$$

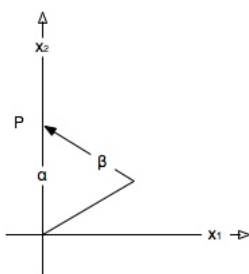
$$= \int_{t_0}^t \underbrace{\sqrt{g\left(\frac{d}{d\sigma}\beta(s_1(\sigma)), \frac{d}{d\sigma}\beta(s_1(\sigma))\right)}}_{>0} d\sigma \xrightarrow{\frac{d}{dt}} g\left(\frac{d}{d\sigma}\beta(s_1(\sigma)), \frac{d}{d\sigma}\beta(s_1(\sigma))\right) = 1$$

Nach vorigem Beispiel ist $\beta(s_1(s))$ Beobachter.

Das Zwillingsparadox: Betrachten den Minkowski Raum und zwei unparametrisierte Beobachter α, β , die sich mit den Geschwindigkeiten

$$\alpha'(s) = (1, 0, 0, 0), \quad \beta'(s) = \begin{cases} (1, v, 0, 0) & : s \leq T \\ (1, -v, 0, 0) & : T \leq s \leq 2T \end{cases}$$

vom Ursprung zum Punkt P bewegen.



Die beiden Beobachter brauchen unterschiedliche Zeiten um zu P zu gelangen:

$$\alpha : \Delta t = \int_0^{2T} d\sigma = 2T, \quad \beta : \Delta t = \int_0^{2T} \sqrt{1 - v^2} d\sigma = 2T\sqrt{1 - v^2}$$

12.0.27 Definition: Geodäte

Eine *Geodäte* ist eine Weltlinie einer kraftfreien Bewegung eines Teilchens.

Postulat: Geodäten von P nach Q sind die Kurven, so dass

$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g(\beta'(\sigma), \beta'(\sigma))} d\sigma$$

für genügend kleine $|s_1 - s_2|$ extremal ist. Ziel ist es:

- Differentialgleichung für eine Geodäte zu finden.
- Die Ergebnisse mit dem Experiment zu vergleichen.

12.0.28 Euler-Lagrange Gleichung

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit M und

$$L : \mathbb{R} \times TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(t, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\varphi \circ x}, \underbrace{y_1, \dots, y_n}_{y \in T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n})$$

mit

$$x \in \mathcal{C}^2([a, b], M) =: C$$

und dem Funktional

$$\zeta : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

Wir sagen dass $x \in C$ *extremal* ist bzgl. $P, Q \in M$ wenn $x(a) = P$, $x(b) = Q$ und $\zeta(x)$ ein globales Extremum besitzt!

12.0.29 Satz über extremale Kurven

Ist x_0 extremal, so gilt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_0^i} L(t, x_0(t), x_0'(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0(t), x_0'(t))$$

Es genügt oberen Satz im \mathbb{R}^n zu zeigen, da x_0 auch extremal für beliebig nahe liegende Punkte auf der Kurve ist, so dass man auf eine einzige Karte zugreifen kann.

Beweis: Sei $z \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $z(a) = z(b) = 0$. Wir untersuchen die Funktion $g(\eta) := \zeta(x_0 + \eta z)$ und sehen dass diese in $\eta = 0$ ein extremum hat. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dg}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta} \int_a^b L(t, x_0 + \eta z, x_0' + \eta z') dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \eta} L(t, x_0 + \eta z, x_0' + \eta z') dt \\ &= \int_a^b \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} L(t, x_0, x_0') z^i dt + \int_a^b \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0, x_0') \cdot z^{i'} dt \\ &= \sum_i \int_a^b \frac{\partial}{\partial x^i} L(t, x_0, x_0') z^i dt + \underbrace{\sum_i z^i \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0, x_0') \Big|_a^b}_0 - \sum_i \int_a^b z^i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0, x_0') dt \\ &= \sum_i \int_a^b z^i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x^i} L(t, x_0, x_0') - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0, x_0') \right] dt \end{aligned}$$

Da z beliebig sein kann, muss jeder einzelne Summand verschwinden. Ferner muss sogar der gesamte Integrand verschwinden, und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L(t, x_0, x_0') = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} L(t, x_0, x_0') \quad \square$$

12.0.30 Berechnung von Geodäten

Frage: Wie findet man so genannte *nach Bogenlänge parametrisierten* Geodäten?

Antwort: Euler-Lagrange Gleichung.

Wir schreiben die Euler-Lagrange Gleichung für

$$L = \sqrt{g(x', x')}$$

auf, wobei wir o.B.d.A setzen $g(x', x') = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g(x', x')} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lk} y^l y^k$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i} \cdot \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_0 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y^i} = g_{ik} y^k, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} = y^k \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} = g_{ij}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y^i}}_0 + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \frac{dy^j}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right) (x^j)' (x^k)' + g_{ij} (x^j)''$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} (x^j)' (x^k)' = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right) (x^j)' (x^k)' + g_{ij} (x^j)''$$

Da $g_{ik} = g_{ki}$ gilt, ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right) (x^j)' (x^k)' = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} \right) (x^j)' (x^k)' = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ji} \right) (x^k)' (x^j)''$$

und man erhält durch

$$g_{ij}(x^j)'' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} (x^j)' (x^k)' - \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right) (x^j)' (x^k)' = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ji} \right] \cdot (x^j)' (x^k)'$$

$$\rightarrow (x^l)'' = \underbrace{\frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ji} \right]}_{-\Gamma_{jk}^l} \cdot (x^j)' (x^k)'$$

die Differentialgleichungen für die Geodäten

$$(x^l)'' = -\Gamma_{ij}^l (x^i)' (x^j)'$$

12.0.31 Satz über die Geodätengleichung

Die Geodätengleichung ist äquivalent zur Differentialgleichung

$$\nabla_{x'} x' = 0$$

Beweis: Erst Annahme: Geodätengleichung (*). Dann ist:

$$\begin{aligned} \nabla_{x'} x' &= \nabla_{(x' f^i) \partial_i} (x' f^j) \partial_j = (x' f^i) \nabla_{\partial_i} (x' f^j) \partial_j = \frac{du^i}{dt} [\partial_i (x' f^j) \partial_j + (x' f^j) \nabla_{\partial_i} \partial_j] \\ &= \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{du^j}{dt} \partial_j + \frac{du^i}{dt} \underbrace{\frac{du^j}{dt} \Gamma_{ij}^l \partial_l}_{\frac{du^l}{dt} \Gamma_{il}^j} = \left[\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \frac{du^i}{dt} \frac{du^l}{dt} \Gamma_{il}^j \right] \partial_j \stackrel{*}{=} \left[\frac{d^2 u^j}{dt^2} - \frac{d^2 u^j}{dt^2} \right] \partial_j = 0 \end{aligned}$$

Jetzt: Annahme $\nabla_{x'} x' = 0$. Dann ist aus obiger Rechnung ersichtlich:

$$0 = \nabla_{x'} x' = (\dots) = \left[\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \frac{du^i}{dt} \frac{du^l}{dt} \Gamma_{il}^j \right] \partial_j$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2 u^j}{dt^2} = - \frac{du^i}{dt} \frac{du^l}{dt} \Gamma_{il}^j \quad \square$$

12.0.32 Bemerkungen zu Geodäten

- Ist $x(t)$ Lösung der Geodätengleichung, dann ist $g(x', x') : const$, denn

$$\frac{d}{dt} g(x', x') = \nabla_{x'} g(x', x') = 2g(\underbrace{\nabla_{x'} x'}_0, x') = 0$$

- Ist $x(t)$ eine Lösung der Geodätengleichung, so ist auch $x(\lambda t)$ eine.
- Man kann Geodäten umparametrisieren so dass sie Weltlinien sind.
- Lösungen der DGL

$$\nabla_{x'} x' = 0, \quad g(x', x') = 1$$

sind Weltlinien.

- Wir gehen davon aus dass jede Lösung der Geodätengleichung, eine Geodäte ist.

Beispiel: Der Minkowski Raum Wir betrachten eine *Kraftfreie* Bewegung im Minkowski Raum \mathbb{R}^4 . Unter der Euklidischen Metrik würde gelten:

$$\nabla_{x'} x' = 0 \Leftrightarrow x'' = 0 \Leftrightarrow x = vt + x_0$$

Durch die Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{dr^2}{h(r)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

ergeben sich die Geodätengleichungen

$$t'' = -\frac{2\mu}{r^2 h(r)} t' r'$$

$$r'' = -\frac{h(r)}{r^2} \mu (t')^2 + \frac{\mu}{r^2 h(r)} (r')^2 + rh(r)(\vartheta')^2 + rh(r)(\varphi')^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\varphi'' = -\frac{2}{r} r' \varphi' - 2 \cot \vartheta \cdot \vartheta' \varphi'$$

$$\vartheta'' = \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot (\varphi')^2 - \frac{2}{r} r' \vartheta'$$

12.0.33 Satz über die Kraftfreie Bewegung in der Schwarzschild Metrik

Seien $\vartheta, \varphi : \text{const.}$ Dann ist

$$r'' = -\frac{\mu}{r^2}$$

Für Teilchen besteht also kein Unterschied zwischen ihrer Bewegung und der im Fall der klassischen Mechanik.

Beweis: Verwenden die Geodätengleichung für die Schwarzschild-Metrik:

$$\varphi'' = \vartheta'' = 0$$

$$\varphi' = \vartheta' = 0 \rightarrow r'' = -\frac{\mu}{r^2} \underbrace{\left(h(r)(t')^2 - \frac{1}{h(r)} r \right)}_1$$

$$g(x', x') = 1, \quad x' \cong (t', r', 0, 0)$$

Bemerkung: Für einen anderen Beobachter, wäre die Geschwindigkeit größer:

$$\frac{t'}{r' \sqrt{h(r)}} > \frac{r'}{t'}$$

Beispiel: Die Periheldrehung von Merkur Betrachten die Bewegung von Merkur um die Sonne mit der Masse μ . Durch

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu}{r^2} \vec{e}_\rho$$

ergibt sich im klassischen Sinne

$$\frac{1}{r} = \lambda \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu}{L^2}$$

wobei $L = r^2 \dot{\varphi} : \text{const}$ der Drehimpuls ist. Obere Bahn stellt eine feste Ellipse dar, mit dem einen Brennpunkt in der Sonne. In der Schwarzschild-Metrik kommt man auf die Differentialgleichung

$$u'' + u = \frac{\mu}{L^2} + 3\mu u^2, \quad u := \frac{1}{r}$$

die allgemein nicht analytisch lösbar ist.

Näherung der Lösung: Man berechnet erst $u_k(\varphi)$ im klassischen Sinne aus, und setzt dies dann in die DGL ein:

$$u'' + u \approx \frac{\mu}{L^2} + 3\mu \cdot u_k^2(\varphi)$$

Durch explizites Lösen kommt man auf eine Umdrehung des Perihels (Punkt des kleinsten Abstandes von der Sonne) um $\frac{3''}{4}$ pro Jahr, was etwa mit den Beobachtungen übereinstimmt!

13 Integration

13.1 Einführung

13.1.1 Kurvenintegral 2. Art

Zu einem Vektorfeld \vec{F} , gegeben auf Kurve \mathcal{K} mit Parameterdarstellung $x = x(t)$, $\varphi := x^{-1}$:

$$x : I \rightarrow \mathcal{K}, \varphi : \mathcal{K} \rightarrow I$$

ist

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} d\vec{r} := \int_I \vec{F}(x(t)) \frac{d\vec{x}}{dt} dt$$

In unserem Kontext identifizieren wir das Feld \vec{F} als Linearform:

$$g(\vec{F}, \cdot) =: F(\cdot)$$

und verallgemeinern: Zu 1-Form F auf orientierter Kurve mit Karte φ :

$$\int_{\mathcal{K}} F := \int_{\varphi(\mathcal{K})} \left\langle \frac{d}{dt}, F(\varphi^{-1}(t)) \right\rangle dt = \int_{\varphi(\mathcal{K})} F(\varphi^{-1}(t)) (\partial_t) dt$$

13.1.2 Oberflächenintegral 2. Art

Zu Vektorfeld \vec{S} auf orientierter Fläche \mathcal{O} mit Parameterdarstellung $\vec{r}(u, v)$ d.h. $\vec{r} \xrightarrow{\varphi} (u, v) \in \Gamma$ definiert man

$$\int_{\mathcal{O}} \vec{S} d\vec{A} := \int_{\Gamma} \vec{S}(u, v) \cdot (\partial_u \times \partial_v) du dv$$

In unserem Kontext ist

$$S(\cdot, \cdot) := g(\vec{S}, \cdot \times \cdot)$$

eine 2-Form (schiefsymmetrisches Tensorfeld). Verallgemeinern also: Zu 2-Form S auf orientierter Fläche \mathcal{O} , mit Karte φ :

$$\int_{\mathcal{O}} S := \int_{\varphi(\mathcal{O})} S(\varphi^{-1}(u, v)) (\partial_u, \partial_v) du dv$$

13.1.3 Kurvenintegrale 1. Art

Zu skalarem Feld f auf einer Kurve \mathcal{K} mit Parameterdarstellung $x(t)$, $t \in I$ schreibt man:

$$\int_{\mathcal{K}} f ds := \int_I f(x(t)) \|\dot{x}(t)\| dt \cong \int_I f(x(t)) \sqrt{g(\partial_t, \partial_t)} dt$$

13.1.4 Oberflächenintegral 1. Art

Zu skalarem Feld f auf einer Fläche \mathcal{F} mit Parameterdarstellung $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Gamma$ ist erklärt:

$$\int_{\mathcal{F}} f dA := \int_{\Gamma} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv \cong \int_{\Gamma} f(u, v) \sqrt{\begin{vmatrix} g(\partial_u, \partial_u) & g(\partial_u, \partial_v) \\ g(\partial_v, \partial_u) & g(\partial_v, \partial_v) \end{vmatrix}} du dv$$

13.2 Allgemeiner Integralbegriff

13.2.1 Integrale 1. Art

Zu skalarem Feld f auf Mannigfaltigkeit M mit Karte φ ist erklärt:

$$\int_M f dA := \int_{\varphi(M)} f(x(u^1, \dots, u^n)) \sqrt{\det(g(\partial_i, \partial_j))} du^1 \dots du^n$$

13.2.2 Integral 2. Art

Für n -Form ω mit kompaktem Träger, auf n -dimensionaler, orientierter Mannigfaltigkeit M mit Karte φ definiert man:

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(M)} \omega(\varphi^{-1}(u)) (\partial_1, \dots, \partial_n) du$$

Ist M nicht durch eine einzige Karte beschreibbar, so verwendet man Atlas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Zu offener Überdeckung (U_α) wählt man eine so genannte *Zerlegung der Eins*: Familie $(\tau_\beta)_{\beta \in B}$ von nicht negativen C^∞ Funktionen mit:

- a) $\forall p \in M : \exists V$ offen : $p \in V \wedge \text{supp } \tau_\beta \cap V = \emptyset$ außer für endlich viele $\beta \in B$
- b) $\forall p \in M : \sum_{\beta \in B} \tau_\beta(p) = 1$
- c) $\forall \beta \in B : \exists \alpha \in A : \text{supp } \tau_\beta \subset U_\alpha$

Bemerkung: Auf jeder C^∞ Mannigfaltigkeit lässt sich eine Zerlegung der Eins konstruieren. Somit definiert man:

$$\int_M \omega := \sum_{\beta \in B} \int_{U_{\alpha(\beta)}} \omega \cdot \tau_\beta$$

13.2.3 Satz über die Integration einer p -Form:

Die Definition des Integrals ist unabhängig von der Auswahl der Karte φ .

Beweis: Zu zeigen wäre: Für gleichorientierte Karten φ und ψ mit den Koordinaten u_i bzw. v_i ist:

$$\int_{\varphi(M)} \omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) du^1 \dots du^n = \int_{\psi(M)} \omega(\psi^{-1}(v)) \left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n} \right) dv^1 \dots dv^n$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \right) &= \omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial v^{k_1}}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial v^{k_1}}, \dots, \frac{\partial v^{k_n}}{\partial u^n} \frac{\partial}{\partial v^{k_n}} \right) \\ &= \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \frac{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}{\partial u^1} \dots \frac{\partial v^{\mathcal{P}(n)}}{\partial u^n} \cdot \underbrace{\omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial}{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{\mathcal{P}(n)}} \right)}_{\chi(\mathcal{P}) \omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n} \right)} = \omega(\varphi^{-1}(u)) \left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n} \right) \cdot \underbrace{\sum_{\mathcal{P}} \chi(\mathcal{P}) \frac{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}{\partial u^1} \dots \frac{\partial v^{\mathcal{P}(n)}}{\partial u^n}}_{\det \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} \right)} \end{aligned}$$

Durch die Umrechnungsformel für Riemann-Integrale folgt somit die Gleichheit der Integrale.

13.2.4 Elegantere Formulierung der Integration 1. Art

Für skalares Feld f definiert man:

$$\int_M f dV := \int_{\varphi(M)} f(\varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n)) \cdot V(\varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n)) (\partial_1, \dots, \partial_n) du^1 \dots du^n$$

mit der Volumenform V . Beide Definitionen des Integrals 1. Art sind äquivalent.